CORRECTION DES ORAUX BLANCS

Exercice 1

1) Montrer que l'intégrale : $I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2 x}dx$ existe pour tout entier naturel *n*.
2) Montrer que la suite (I_n) est une suite arithmétique. En déduire le calcul de I_n.
3) En déduire le calcul de l'intégrale : $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$.

Solution :

1) Pour tout *n*, la fonction $x \mapsto \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2 x}$ est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ car $\sin x \neq 0$. Et elle est prolongeable par continuité en 0 car $\sin x \underset{0}{\sim} x$ donc $\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2 x} = n^2$.

   Donc l'intégrale : $I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nx)}{\sin^2 x}dx$ existe pour tout entier naturel *n*.

2) Soit : $J_n = I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(n+1)x - \sin^2 nx}{\sin^2 x}dx$.

   $J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{[\sin(n+1)x - \sin nx][\sin(n+1)x + \sin nx]}{\sin^2 x}dx$.

   Or $\sin(n+1)x - \sin nx = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)$

   Et $\sin(n+1)x + \sin nx = 2\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

   Donc : $[\sin(n+1)x - \sin nx][\sin(n+1)x + \sin nx] = \sin x \sin(2n+1)x$.

   Donc : $J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx$. Or $\sin(2n+3)x - \sin n(2n+1)x = 2\sin x \cos 2(n+1)x$.

   $$J_{n+1} - J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2n+3)x - \sin(2n+1)x}{\sin x}dx = 2\int_0^{\pi/2} \cos 2(n+1)x\,dx = \left[\frac{\sin 2(n+1)x}{n+1}\right]_0^{\pi/2} = 0.$$

   Donc la suite (J_n) est constante. Donc : $\forall n \in \mathbb{N} \quad J_n = J_0 = I_1 - I_0$.

   Or $I_0 = 0$ et $I_1 = \int_0^{\pi/2} dx = \frac{\pi}{2}$. Donc : $\forall n \in \mathbb{N} \quad I_{n+1} - I_n = \frac{\pi}{2}$.

   Donc la suite (I_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{\pi}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = n\frac{\pi}{2}$.

3) La fonction $x \mapsto \frac{\sin^2 x}{x^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$. Elle est prolongeable par continuité en 0 car $\sin x \underset{0}{\sim} x$ donc $\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 1$. Donc l'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$ existe. De plus : $\forall x \in [1, +\infty[\quad 0 \leq \frac{\sin^2 x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$. Or l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ existe. Donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$ existe aussi. Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$ existe.

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{n\pi/2} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$. Or $\int_0^{n\pi/2} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{1}{n}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nt)}{t^2} dt = \frac{1}{n} K_n$ où $t = \frac{x}{n}$.

Or $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $0 \le \sin t \le t$. Donc $K_n \le I_n$. Et : $I_n - K_n = \int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{\sin^2 t} - \frac{1}{t^2}\right)\sin^2(nt)dt$.

La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sin^2 t} - \frac{1}{t^2}$ est continue sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et au voisinage de 0 :

$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^4)$, donc $\sin^2 t = t^2 - \frac{t^4}{3} + o(t^4) = t^2\left(1 - \frac{t^2}{3} + o(t^2)\right)$.

Donc $\frac{1}{\sin^2 t} = \frac{1}{t^2}\left(1 + \frac{t^2}{3} + o(t^2)\right)$. Donc $\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 t} - \frac{1}{t^2}\right) = \frac{1}{3}$.

Donc l'intégrale $\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{\sin^2 t} - \frac{1}{t^2}\right)dt$ existe et $0 \le I_n - K_n \le \int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{\sin^2 t} - \frac{1}{t^2}\right)dt$.

Donc : $I_n - \int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{\sin^2 t} - \frac{1}{t^2}\right)dt \le K_n \le I_n$ et $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{\sin^2 t} - \frac{1}{t^2}\right)dt \le \frac{1}{n}K_n \le \frac{\pi}{2}$.

Donc : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}K_n = \frac{\pi}{2}$. Donc $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}}$

Exercice 2

Soient p_1 et p_2 deux projecteurs d'un espace vectoriel E tels que $p_1 \circ p_2 = 0$.

1) Montrer que $q = p_1 + p_2 - p_2 \circ p_1$ est un projecteur.
2) Montrer que : $\operatorname{Ker} q = \operatorname{Ker} p_1 \cap \operatorname{Ker} p_2$.
3) Montrer que : $\operatorname{Im} q = \operatorname{Im} p_1 \oplus p_2(\operatorname{Ker} p_1)$.

Solution :

1) p_1 et p_2 sont des projecteurs, donc des endomorphismes de *E*. Donc q est un endomorphisme de *E*. Et : $q \circ q = (p_1 + p_2 - p_2 \circ p_1) \circ (p_1 + p_2 - p_2 \circ p_1)$. Donc :

$$q \circ q = p_1 \circ p_1 + p_1 \circ p_2 - p_1 \circ p_2 \circ p_1 + p_2 \circ p_1 + p_2 \circ p_2 - p_2 \circ p_2 \circ p_1 - p_2 \circ p_1 \circ p_1 - p_2 \circ p_1 \circ p_2 + p_2 \circ p_1 \circ p_2 \circ p_1$$

Or p_1 et p_2 sont des projecteurs, donc $p_1 \circ p_1 = p_1$ et $p_2 \circ p_2 = p_2$. Et $p_1 \circ p_2 = 0$.

Donc $q \circ q = p_1 + p_2 - p_2 \circ p_1 = q$.

Donc $q = p_1 + p_2 - p_2 \circ p_1$ est un projecteur.

2) Soit $x \in \operatorname{Ker} q$. Donc $q(x) = 0_E$. Donc $p_1[q(x)] = p_1(0_E) = 0_E$.

Or $p_1 \circ q = p_1 \circ p_1 + p_1 \circ p_2 - p_1 \circ p_2 \circ p_1 = p_1$. Donc $p_1(x) = 0_E$. Donc $x \in \operatorname{Ker} p_1$.

Donc $q(x) = p_1(x) + p_2(x) - p_2 \circ p_1(x) = p_2(x)$. Donc $p_2(x) = 0_E$. Donc $x \in \operatorname{Ker} p_2$.

Donc $\operatorname{Ker} q \subset \operatorname{Ker} p_1 \cap \operatorname{Ker} p_2$.

Réciproquement, soit $x \in \operatorname{Ker} p_1 \cap \operatorname{Ker} p_2$. Donc $p_1(x) = 0_E$ et $p_2(x) = 0_E$.

Or $q(x) = p_1(x) + p_2(x) - p_2 \circ p_1(x) = 0_E$. Donc $x \in \operatorname{Ker} q$.

Donc $\operatorname{Ker} p_1 \cap \operatorname{Ker} p_2 \subset \operatorname{Ker} q$.

Donc $\boxed{\operatorname{Ker} q = \operatorname{Ker} p_1 \cap \operatorname{Ker} p_2}$

3) Soit $x \in \operatorname{Im} q$. Donc il existe $u \in E$ tel que $x = q(u) = p_1(u) + p_2(u) - p_2 \circ p_1(u)$.

Donc $x = y + z$ avec $y = p_1(u)$ et $z = p_2(u) - p_2 \circ p_1(u) = p_2[u - p_1(u)]$.

Or $p_1[u - p_1(u)] = p_1(u) - p_1 \circ p_1(u) = 0_E$. Donc $u - p_1(u) \in \operatorname{Ker} p_1$.

Donc $x = y + z$ avec $y \in \operatorname{Im} p_1$ et $z \in p_2(\operatorname{Ker} p_1)$. Donc $x \in \operatorname{Im} p_1 + p_2(\operatorname{Ker} p_1)$.

Donc $\operatorname{Im} q \subset \operatorname{Im} p_1 + p_2(\operatorname{Ker} p_1)$.

Réciproquement, soit $x \in \operatorname{Im} p_1 + p_2(\operatorname{Ker} p_1)$.

Donc il existe $y \in \operatorname{Im} p_1$ et $z \in p_2(\operatorname{Ker} p_1)$ tels que $x = y + z$.

Donc il existe $u \in E$ et $v \in \operatorname{Ker} p_1$ tels que $x = p_1(u) + p_2(v)$. Et $p_1(v) = 0_E$.

Donc : $p_1(x) = p_1 \circ p_1(u) + p_1 \circ p_2(v) = p_1(u)$. Donc : $x = p_1(x) + p_2(v)$.

Et $p_2(x) = p_2 \circ p_1(x) + p_2 \circ p_2(v) = p_2 \circ p_1(x) + p_2(v)$. Donc $p_2(v) = p_2(x) - p_2 \circ p_1(x)$.

Donc : $x = p_1(x) + p_2(x) - p_2 \circ p_1(x) = q(x)$. Donc $x \in \operatorname{Im} q$.

Donc $\operatorname{Im} p_1 + p_2(\operatorname{Ker} p_1) \subset \operatorname{Im} q$.

Donc $\operatorname{Im} q = \operatorname{Im} p_1 + p_2(\operatorname{Ker} p_1)$.

Montrons que la somme est directe. Si $x \in \operatorname{Im} p_1 \cap p_2(\operatorname{Ker} p_1)$, il existe $u \in E$ et $v \in \operatorname{Ker} p_1$ tels que $x = p_1(u) = p_2(v)$. Donc $p_1(x) = p_1 \circ p_1(u) = p_1 \circ p_2(v) = 0_E$.

Donc $p_1(u) = 0_E$. Donc $x = 0_E$. Donc $\operatorname{Im} p_1 \cap p_2(\operatorname{Ker} p_1) = \{0_E\}$.

Donc $\boxed{\operatorname{Im} q = \operatorname{Im} p_1 \oplus p_2(\operatorname{Ker} p_1)}$

Exercice 3

1) Justifier la convergence de la série $\left(\sum \frac{x^n}{1+x^n}\right)$ pour tout $x \in [0,1[$.

2) Montrer que : $\forall x \in [0,1[\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{x^{n+1}}{1+x^{n+1}} \leq \int_n^{n+1} \frac{x^u}{1+x^u} du \leq \frac{x^n}{1+x^n}$.

3) En déduire $\lim_{x \to 1^-} (1-x) \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{1+x^n}$.

Solution :

1) Pour tout $x \in [0,1[$, on a : $0 \leq \frac{x^n}{1+x^n} \leq x^n$.

Or si $x \in [0,1[$, la série $\left(\sum x^n\right)$ est convergente.

$\boxed{\text{Donc la série } \left(\sum \frac{x^n}{1+x^n}\right) \text{ est convergente pour tout } x \in [0,1[.}$

2) Si $x = 0$, l'inégalité est évidente.

Si $x \in]0,1[$, on étudie la fonction $\varphi_x : u \mapsto \frac{x^u}{1+x^u} = 1 - \frac{1}{1+x^u} = 1 - \frac{1}{1+e^{u \ln x}}$.

Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\varphi'_x(u) = \frac{e^{u \ln x} \ln x}{(1+e^{u \ln x})^2} < 0$ car $x \in]0,1[$, donc $\ln x < 0$.

Donc φ_x est décroissante. Donc : $\forall u \in [n, n+1] \quad \varphi_x(n+1) \leq \varphi_x(u) \leq \varphi_x(n)$.

Donc d'après l'inégalité de la moyenne : $\varphi_x(n+1) \leq \int_n^{n+1} \varphi_x(u)\, du \leq \varphi_x(n)$.

$\boxed{\text{Donc } \forall x \in [0,1[\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{x^{n+1}}{1+x^{n+1}} \leq \int_n^{n+1} \frac{x^u}{1+x^u} du \leq \frac{x^n}{1+x^n}.}$

3) Soit $x \in [0,1[$. Donc : $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \int_k^{k+1} \frac{x^u}{1+x^u} du \leq \frac{x^k}{1+x^k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{x^u}{1+x^u} du$.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{x^u}{1+x^u} du \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{1+x^k} \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{x^u}{1+x^u} du$.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \int_1^{n+1} \frac{x^u}{1+x^u} du \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{1+x^k} \leq \int_0^{n} \frac{x^u}{1+x^u} du$.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{2} + \int_1^{n+1} \frac{x^u}{1+x^u} du \le \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{1+x^k} \le \frac{1}{2} + \int_0^n \frac{x^u}{1+x^u} du$.

Or $\int_0^n \frac{x^u}{1+x^u} du = \frac{1}{\ln x} \int_0^n \varphi'_x(u)\, du = \frac{1}{\ln x}[\varphi_x(n) - \varphi_x(0)] = \frac{1}{\ln x}\left[\frac{x^n}{1+x^n} - \frac{1}{2}\right]$.

Et $\int_1^{n+1} \frac{x^u}{1+x^u} du = \frac{1}{\ln x} \int_1^{n+1} \varphi'_x(u)\, du = \frac{1}{\ln x}[\varphi_x(n+1) - \varphi_x(1)] = \frac{1}{\ln x}\left[\frac{x^{n+1}}{1+x^{n+1}} - \frac{x}{x+1}\right]$.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{\ln x}\left[\frac{x^{n+1}}{1+x^{n+1}} - \frac{x}{x+1}\right] \le \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{1+x^k} \le \frac{1}{2} + \frac{1}{\ln x}\left[\frac{x^n}{1+x^n} - \frac{1}{2}\right]$.

Or $x \in [0,1[$. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} x^n = 0$. Et $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{1+x^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{1+x^k}$ (série convergente).

Donc par passage à la limite : $\forall x \in [0,1[\quad \frac{1}{2} - \frac{x}{(x+1)\ln x} \le \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^n} \le \frac{1}{2} - \frac{1}{2\ln x}$.

Donc : $\forall x \in [0,1[\quad \frac{1-x}{2} - \frac{x(1-x)}{(x+1)\ln x} \le (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^n} \le \frac{1-x}{2} - \frac{1-x}{2\ln x}$.

Or $\ln x \underset{1}{\sim} x-1$. Donc $\lim\limits_{x \to 1^-}\left[\frac{1-x}{2} - \frac{x(1-x)}{(x+1)\ln x}\right] = \lim\limits_{x \to 1^-}\left[\frac{1-x}{2} - \frac{1-x}{2\ln x}\right] = \frac{1}{2}$.

Donc, par encadrement : $\boxed{\lim\limits_{x \to 1^-}(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^n} = \frac{1}{2}}$

Exercice 4

Soit E un espace vectoriel de dimension n.
Soit f un endomorphisme de E tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \ne 0$.

1) Montrer qu'il existe un vecteur u de E tel que les vecteurs u, $f(u)$, …, $f^{n-1}(u)$ forment une base de E.
2) En déduire les dimensions de $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

Solution :

1) $f^{n-1} \ne 0$. Donc il existe un vecteur u de E tel que $f^{n-1}(u) \ne 0_E$.
   Soient α_0, α_1, …, α_{n-1} tels que $\alpha_0 u + \alpha_1 f(u) + ... + \alpha_{n-1} f^{n-1}(u) = 0_E$.
   Donc $f^{n-1}\big(\alpha_0 u + \alpha_1 f(u) + ... + \alpha_{n-1} f^{n-1}(u)\big) = 0_E$, donc $\alpha_0 f^{n-1}(u) = 0_E$, donc $\alpha_0 = 0$.
   Donc $\alpha_1 f(u) + ... + \alpha_{n-1} f^{n-1}(u) = 0_E$, donc $f^{n-2}\big(\alpha_1 f(u) + ... + \alpha_{n-1} f^{n-1}(u)\big) = 0_E$.
   Donc $\alpha_1 f^{n-1}(u) = 0_E$, donc $\alpha_1 = 0$.
   Ainsi de proche en proche : $\alpha_0 = \alpha_1 = ... = \alpha_{n-1} = 0$. Donc la famille est libre.
   C'est une famille libre de n vecteurs dans un espace de dimension n.
   Donc les vecteurs u, $f(u)$, …, $f^{n-1}(u)$ forment une base de E.
2) $f^n = 0$, donc $f^n(u) = 0_E$, donc $f^{n-1}(u) \in \operatorname{Ker} f$.
   Donc $\operatorname{Ker} f$ contient au moins un vecteur non nul. Donc $\dim \operatorname{Ker} f \ge 1$.
   D'après 1), les vecteurs $f(u)$, …, $f^{n-1}(u)$ forment une famille libre car ils sont extraits d'une famille libre. De plus, ils sont dans $\operatorname{Im} f$. Donc $\dim \operatorname{Im} f \ge n-1$.
   Donc $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f \ge n$.
   Or d'après le théorème du rang : $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = n$.
   Donc $\boxed{\dim \operatorname{Ker} f = 1}$ et $\boxed{\dim \operatorname{Im} f = n-1}$

Exercice 5

Montrer que la série $\left(\sum \frac{1}{(4n+1)(4n+3)}\right)$ converge et calculer sa somme.

Solution :

La série $\left(\sum \frac{1}{(4n+1)(4n+3)}\right)$ est une série à termes positifs et $\frac{1}{(4n+1)(4n+3)} \sim \frac{1}{16n^2}$.

Donc la série $\left(\sum \frac{1}{(4n+1)(4n+3)}\right)$ est de même nature que la série $\left(\sum \frac{1}{16n^2}\right)$.

Or la série $\left(\sum \frac{1}{n^2}\right)$ est une série de Riemann convergente ($\alpha > 1$).

Donc la série $\left(\sum \frac{1}{(4n+1)(4n+3)}\right)$ est convergente.

La somme partielle d'ordre n est : $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(4k+1)(4k+3)} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4k+1} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4k+3}$.

Or : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{n+1} = \int_0^1 x^n dx$. Donc : $S_n = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\int_0^1 x^{4k} dx - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\int_0^1 x^{4k+2} dx$. Donc :

$$S_n = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\int_0^1 (-x^2)^{2k} dx + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\int_0^1 (-x^2)^{2k+1} dx = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n+1}\int_0^1 (-x^2)^k dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\sum_{k=0}^{2n+1}(-x^2)^k\right] dx.$$

Or si $x \in [0,1[$: $\sum_{k=0}^{2n+1}(-x^2)^k = \frac{1-(-x^2)^{2n+2}}{1-(-x^2)} = \frac{1-x^{4n+4}}{1+x^2}$. Et si $x = 1$: $\sum_{k=0}^{2n+1}(-x^2)^k = 0$.

Donc : $\forall x \in [0,1] \quad \sum_{k=0}^{2n+1}(-x^2)^k = \frac{1-x^{4n+4}}{1+x^2}$. Donc : $S_n = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1-x^{4n+4}}{1+x^2} dx$.

Donc : $S_n = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^{4n+4}}{1+x^2} dx$. Donc : $S_n - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^{4n+4}}{1+x^2} dx$

Or : $\forall x \in [0,1] \quad 0 \le \frac{x^{4n+4}}{1+x^2} \le x^{4n+4}$. Donc : $0 \le \int_0^1 \frac{x^{4n+4}}{1+x^2} dx \le \int_0^1 x^{4n+4} dx$.

Donc : $0 \le \int_0^1 \frac{x^{4n+4}}{1+x^2} dx \le \frac{1}{4n+5}$. Donc : $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^{4n+4}}{1+x^2} dx = 0$.

Donc : $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}[\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{8}$. Donc $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+3)} = \frac{\pi}{8}}$

Exercice 6

Pour tout entier naturel n, on définit l'intégrale : $I_n = \int_0^1 [\ln(1+x)]^n \, dx$.

1) Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n.
2) En déduire un équivalent de I_n.

Solution :

1) La fonction $x \mapsto [\ln(1+x)]^{n+1}$ est de classe C^1 sur $[0,1]$, donc on peut intégrer I_{n+1}

par parties : $I_{n+1} = \left[x[\ln(1+x)]^{n+1}\right]_0^1 - (n+1)\int_0^1 \frac{x}{1+x}[\ln(1+x)]^n \, dx$.

Donc : $I_{n+1}=(\ln 2)^{n+1}-(n+1)\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x}\right)[\ln(1+x)]^n\,dx$.

Donc : $I_{n+1}=(\ln 2)^{n+1}-(n+1)I_n+(n+1)\int_0^1\left(\frac{1}{1+x}\right)[\ln(1+x)]^n\,dx$.

Donc : $I_{n+1}=(\ln 2)^{n+1}-(n+1)I_n+\left[[\ln(1+x)]^{n+1}\right]_0^1$.

Donc $\boxed{I_{n+1}=2(\ln 2)^{n+1}-(n+1)I_n}$

2) $\forall x\in[0,1]\quad [\ln(1+x)]^{n+1}\geq 0$. Donc $I_{n+1}\geq 0$. Donc : $I_n\leq\frac{2(\ln 2)^{n+1}}{n+1}$.

De plus : $(n+1)I_n=2(\ln 2)^{n+1}-I_{n+1}$. Donc $I_n=\frac{2(\ln 2)^{n+1}}{n+1}-\frac{I_{n+1}}{n+1}$.

Or : $I_{n+1}\leq\frac{2(\ln 2)^{n+2}}{n+2}$, donc $I_n\geq\frac{2(\ln 2)^{n+1}}{n+1}-\frac{2(\ln 2)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$.

Donc : $\frac{2(\ln 2)^{n+1}}{n+1}\left[1-\frac{\ln 2}{n+2}\right]\leq I_n\leq\frac{2(\ln 2)^{n+1}}{n+1}$.

Or : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln 2}{n+2}=0$. Donc : $\frac{2(\ln 2)^{n+1}}{n+1}\left[1-\frac{\ln 2}{n+2}\right]\sim\frac{2(\ln 2)^{n+1}}{n+1}$.

Donc $\boxed{I_n\sim\frac{2(\ln 2)^{n+1}}{n+1}}$

Exercice 7

1) Déterminer le rayon de convergence de la série : $\left(\sum\limits_{n\geq 2}\frac{z^n}{n\ln n}\right)$.

2) Déterminer le rayon de convergence de la série : $\left(\sum\limits_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{x^n}{n!}\right)$.

Solution :

1) Il s'agit d'une série entière $\left(\sum\limits_{n\geq 2}a_n z^n\right)$ avec $a_n=\frac{1}{n\ln n}$.

On se propose d'utiliser le critère de D'Alembert.

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n\ln n}{(n+1)\ln(n+1)}$. Donc : $\frac{a_{n+1}}{a_n}\sim\frac{\ln n}{\ln(n+1)}$. Or $\ln(n+1)=\ln n+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=0$, donc $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=o(\ln n)$, donc $\ln(n+1)\sim\ln n$.

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1=\frac{1}{R}$ d'après le critère de D'Alembert.

Donc le rayon de convergence de la série : $\left(\sum\limits_{n\geq 2}\frac{z^n}{n\ln n}\right)$ est $R=1$.

2) Il s'agit d'une série entière $\left(\sum\limits_{n\geq 1}a_n z^n\right)$ avec $a_n=\frac{1}{n!}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

On se propose d'utiliser le critère de Cauchy.

$\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$. Donc étudions la limite de $b_n=\sqrt[n]{n!}$.

$\ln b_n=\frac{1}{n}\ln(n!)=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k$.

Or : $\lim_{n\to+\infty} \ln n = +\infty$. Donc pour tout $A>0$: $\exists p \quad \forall n \geq p \quad \ln n \geq A$.

Donc : $\forall n \geq p \quad \ln b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{p}\ln k + \frac{1}{n}\sum_{k=p+1}^{n}\ln k$. Donc : $\forall n \geq p \quad \ln b_n \geq \frac{1}{n}\sum_{k=p+1}^{n}\ln k$.

Donc : $\forall n \geq p \quad \ln b_n \geq \frac{n-p}{n}A \geq A - \frac{p}{n}A$. Donc $\forall A>0 \quad \exists p \quad \forall n \geq 2p \quad \ln b_n \geq \frac{A}{2}$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} \ln b_n = +\infty$. Donc $\lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$. Donc $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 0$.

On utilise le critère de Cauchy.

Donc le rayon de convergence de la série : $\left(\sum_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}\frac{x^n}{n!}\right)$ est $R=+\infty$.

Remarque : On aurait pu aussi utiliser le critère de D'Alembert.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{(n+1)^2} n!}{(n+1)!\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}} = \frac{(n+2)^{n^2+2n+1}n^{n^2}}{(n+1)^{2n^2+2n+2}} = \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^{n^2+2n+1}}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}$$

Donc : $\ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = -\ln n + (n^2+2n+1)\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) - (2n^2+2n+2)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Or : $\ln\left(1+\frac{2}{n}\right) = \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Donc :

$$\ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = -\ln n + (n^2+2n+1)\left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - (2n^2+2n+2)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

Donc : $\ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = -\ln n + 1 + o(1)$. Donc $\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = -\infty$. Donc $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$.

Exercice 8

1) Calculer l'intégrale : $I_n = \int_0^1 t^{n-1}(1-t)^2\,dt$.
2) En déduire que : $\frac{1}{1\times 2\times 3} + \frac{1}{3\times 4\times 5} + ... = \ln 2 - \frac{1}{2}$.

Solution :

1) $I_n = \int_0^1 t^{n-1}(1-t)^2\,dt = \int_0^1 t^{n-1}dt - 2\int_0^1 t^n dt + \int_0^1 t^{n+1}dt = \frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}$.

Donc $\boxed{I_n = \frac{2}{n(n+1)(n+2)}}$

2) Il s'agit de la série à termes positifs $\left(\sum \frac{1}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}\right)$.

Or $\frac{1}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)} \sim \frac{1}{8n^3}$. Donc la série $\left(\sum \frac{1}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)}\right)$ est de même nature que la série $\left(\sum \frac{1}{8n^3}\right)$, donc convergente.

La somme partielle d'ordre n est : $S_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)(2k+2)(2k+3)} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} I_{2k+1}$.

Donc : $S_n = \dfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\int_0^1 t^{2k}(1-t)^2\,dt = \dfrac{1}{2}\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n} t^{2k}\right)(1-t)^2\,dt$.

Si $t \in [0,1[$: $\left(\sum_{k=0}^{n} t^{2k}\right)(1-t)^2 = \dfrac{1-(t^2)^{n+1}}{1-t^2}(1-t)^2 = \dfrac{(1-t)(1-t^{2n+2})}{1+t}$

Et si $t=1$: $\left(\sum_{k=0}^{n} t^{2k}\right)(1-t)^2 = 0$. Donc l'égalité est vraie aussi pour $t=1$.

Donc : $S_n = \dfrac{1}{2}\int_0^1 \dfrac{(1-t)(1-t^{2n+2})}{1+t}\,dt = \dfrac{1}{2}\int_0^1 \dfrac{1-t}{1+t}\,dt + \dfrac{1}{2}\int_0^1 \dfrac{(1-t)t^{2n+2}}{1+t}\,dt$.

Or : $\forall t \in [0,1] \quad 0 \le \dfrac{(1-t)t^{2n+2}}{1+t} \le t^{2n+2}$. Donc : $0 \le \int_0^1 \dfrac{(1-t)t^{2n+2}}{1+t}\,dt \le \dfrac{1}{2n+3}$.

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{2}\int_0^1 \dfrac{1-t}{1+t}\,dt = \dfrac{1}{2}\int_0^1\left(\dfrac{2}{1+t}-1\right)dt = \dfrac{1}{2}\left[2\ln(1+t)-t\right]_0^1 = \ln 2 - \dfrac{1}{2}$.

Donc $\boxed{\dfrac{1}{1\times2\times3}+\dfrac{1}{3\times4\times5}+\ldots = \ln 2 - \dfrac{1}{2}}$

Exercice 9

Pour tout entier $n \ge 2$, on considère le polynôme $P_n = X^n - nX + 1$.

1) Montrer que P_n admet exactement une racine réelle x_n entre 0 et 1.
2) Etudier le sens de variations de la suite (x_n) et montrer qu'elle converge.
3) Calculer sa limite et déterminer un équivalent de x_n.

Solution :

1) La fonction polynôme définie par $P_n(x) = x^n - nx + 1$ a pour dérivée $P'_n(x) = n(x^{n-1}-1)$ qui est strictement négative sur $[0,1[$ et nulle en 1.
Donc P_n est continue et strictement décroissante sur $[0,1]$. Donc elle définit une bijection de $[0,1]$ dans $[P_n(1), P_n(0)] = [2-n, 1]$. Donc tout élément de $[2-n,1]$ admet un unique antécédent dans $[0,1]$ par P_n. Or si $n \ge 2$, $0 \in [2-n,1]$.
Donc si $n \ge 2$, l'équation $P_n(x) = 0$ a une unique solution x_n.

   Donc P_n admet exactement une racine réelle x_n entre 0 et 1.

2) La fonction P_n est strictement décroissante et $P_n(x_n) = 0$.
Donc $P_n(x) > 0 \Leftrightarrow 0 \le x < x_n$ et $P_n(x) < 0 \Leftrightarrow x_n < x \le 1$.
$P_n(x_{n+1}) = x_{n+1}^n - nx_{n+1} + 1$. Or $x_{n+1}^{n+1} - (n+1)x_{n+1} + 1 = 0$. Donc $-nx_{n+1} + 1 = x_{n+1} - x_{n+1}^{n+1}$.
Donc $P_n(x_{n+1}) = x_{n+1}^n + x_{n+1} - x_{n+1}^{n+1} = x_{n+1}^n(1-x_{n+1}) + x_{n+1}$. Or $0 \le x_{n+1} \le 1$.
Donc $P_n(x_{n+1}) \ge 0$. Donc $0 \le x_{n+1} \le x_n$.
Donc la suite (x_n) est décroissante et minorée par 0.

   Donc la suite (x_n) est décroissante et convergente.

3) $P_n(x_n) = 0$. Donc $x_n^n - nx_n + 1 = 0$. Donc $x_n = \dfrac{1}{n}(x_n^n + 1)$.
Or $P_n(1) = 2-n$. Donc si $n \ge 3$, 1 n'est pas racine de P_n. Donc $0 \le x_n < 1$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n^n = 0$. Donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0}$ et $\boxed{x_n \sim \dfrac{1}{n}}$

Exercice 10

Soit un entier $n \geq 2$. Soit *f* l'application qui , à tout polynôme *P* de $\mathbb{R}_n[X]$, associe le polynôme $f(P)(X) = (nX+1)P(X) + (1-X^2)P'(X)$.

1) Montrer que *f* est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2) Montrer que si *P* est un vecteur propre de *f*, alors $d°P = n$.
3) Montrer que si *P* est un vecteur propre de *f*, ses racines appartiennent à $\{-1,1\}$.
4) En déduire les valeurs propres et les vecteurs propres de *f*.

Solution :

1) Soit *P* et *Q* deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, et α un réel.

$f(\alpha P + Q)(X) = (nX+1)(\alpha P + Q)(X) + (1-X^2)(\alpha P + Q)'(X)$.

Donc : $f(\alpha P + Q)(X) = (nX+1)[\alpha P(X) + Q(X)] + (1-X^2)[\alpha P'(X) + Q'(X)]$.

$f(\alpha P + Q)(X) = \alpha[(nX+1)P(X) + (1-X^2)P'(X)] + (nX+1)Q(X) + (1-X^2)Q'(X)$

Donc : $f(\alpha P + Q)(X) = \alpha f(P)(X) + f(Q)(X)$. Donc *f* est linéaire.

Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $P \neq 0$, alors $d°P = p$ avec $p \leq n$ et $P(X) = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ avec $a_p \neq 0$.

Donc $P'(X) = \sum_{k=0}^{p} k a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{p-1} (k+1) a_{k+1} X^k$.

$d°(nX+1)P(X) = p+1$ et le coefficient de X^{p+1} est na_p.

$d°(1-X^2)P'(X) = 2 + (p-1) = p+1$ et le coefficient de X^{p+1} est $-pa_p$.

Donc $d°f(P) \leq p+1$ et le coefficient de X^{p+1} est $(n-p)a_p$.

Donc, si $p < n$, alors $d°f(P) = p+1$ et si $p = n$, alors $d°f(P) < p+1$.

Or $p \leq n$. Donc dans tous les cas $d°f(P) \leq n$. Donc $f(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

Donc *f* est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Si *P* est vecteur propre de *f*, $P \neq 0$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(P) = \lambda P$.

Soit $p = d°P$. On a vu que si $p < n$, $d°f(P) = p+1$. Or $d°(\lambda P) = p$ si $\lambda \neq 0$ et $d°(\lambda P) = -\infty$ si $\lambda = 0$, donc $d°(\lambda P)$ n'est jamais égal à $p+1$.

Donc si *P* est un vecteur propre de *f*, alors $d°P = n$.

3) Soit *P* un vecteur propre de *f* : $P \neq 0$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(P) = \lambda P$.

Donc : $\lambda P(X) = (nX+1)P(X) + (1-X^2)P'(X)$.

Donc : $(nX+1-\lambda)P(X) = (X^2-1)P'(X)$ notée (1).

Soit α une racine de *P*. Donc $P(\alpha) = 0$. Donc $(\alpha^2 - 1)P'(\alpha) = 0$.

On raisonne par l'absurde en supposant que $\alpha \notin \{-1,1\}$. Donc $P'(\alpha) = 0$.

En dérivant (1) : $nP(X) + (nX+1)P'(X) = 2XP'(X) + (X^2-1)P''(X)$ notée (2).

Or $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$. Donc : $(\alpha^2-1)P''(\alpha) = 0$. Donc $P''(\alpha) = 0$.

En dérivant (2), on obtient $P^{(3)}(\alpha) = 0$.

En dérivant ainsi successivement, on obtient : $\forall k \in [\![0, p]\!] \quad P^{(k)}(\alpha) = 0$.

Or d'après la formule de Taylor : $P(X) = \sum_{k=0}^{p} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k$.

Donc $P(X) = 0$, ce qui est absurde puisque *P* est un vecteur propre de *f*.

Donc si *P* est un vecteur propre de *f*, ses racines appartiennent à $\{-1,1\}$.

4) Soit *P* un vecteur propre de *f* : $P \neq 0$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(P) = \lambda P$.

Son degré est *n* et ses racines appartiennent à $\{-1,1\}$.

Donc le polynôme est de la forme : $P(X) = a(X-1)^k (X+1)^{n-k}$ où $k \in [\![0, n]\!]$.

Donc : $P'(X) = ak(X-1)^{k-1}(X+1)^{n-k} + a(n-k)(X-1)^k(X+1)^{n-k-1}$.

Donc : $P'(X) = a(X-1)^{k-1}(X+1)^{n-k-1}(nX+2k-n)$

$f(P)(X) = (nX+1)a(X-1)^k(X+1)^{n-k} + (1-X^2)a(X-1)^{k-1}(X+1)^{n-k-1}(nX+2k-n)$.

Donc : $f(P)(X) = a(n+1-2k)(X-1)^k(X+1)^{n-k}$. Donc $f(P) = (n+1-2k)P$.

Donc, si $a \neq 0$, $P(X) = a(X-1)^k(X+1)^{n-k}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_k = n+1-2k$.

Donc les valeurs propres de *f* sont $\lambda_k = n+1-2k$ où $k \in [\![0,n]\!]$.
Le sous-espace propre associé à λ_k est $E_k = \text{Vect} < (X-1)^k(X+1)^{n-k} >$.

Exercice 11

1) Factoriser dans $\mathbb{R}$ le polynôme $X^{2n}-1$.
2) Si *f* est une fonction continue sur $[0,\pi]$, que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\pi}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right)$?
3) En déduire pour $a \neq \pm 1$ l'intégrale : $I = \int_0^{\pi} \ln(a^2 - 2a\cos t + 1)\,dt$.

Solution :

1) Les racines complexes de $X^{2n}-1$ sont $\alpha_k = e^{ik\pi/n}$ où $k \in [\![0,2n-1]\!]$.

Il y a deux racines réelles : $\alpha_0 = 1$ et $\alpha_n = 1$. Et $\forall k \in [\![0,2n-1]\!] \quad \alpha_{2n-k} = \overline{\alpha_k}$.

Donc $X^{2n}-1 = \prod\limits_{k=0}^{2n-1}(X-\alpha_k) = (X-1)(X+1)\prod\limits_{k=1}^{n-1}(X-\alpha_k)(X-\overline{\alpha_k})$.

Donc $\boxed{X^{2n}-1 = (X-1)(X+1)\prod\limits_{k=1}^{n-1}\left(X^2 - 2X\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right)}$

2) Il s'agit d'une somme de Riemann : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \int_0^{\pi} f(t)dt}$

3) Le discriminant de $a^2 - 2a\cos t + 1$ est $\Delta = 4\cos^2 t - 4 = -4\sin^2 t$. Donc $\Delta < 0$ si $t \neq 0$ et $t \neq \pi$. Donc $\forall t \in]0,\pi[\quad a^2 - 2a\cos t + 1 > 0$.

Si $t = 0$: $a^2 - 2a\cos t + 1 = (a-1)^2$ donc $a^2 - 2a\cos t + 1 > 0$ car $a \neq 1$.

Si $t = \pi$: $a^2 - 2a\cos t + 1 = (a+1)^2$ donc $a^2 - 2a\cos t + 1 > 0$ car $a \neq -1$.

Donc la fonction $t \mapsto \ln(a^2 - 2a\cos t + 1)$ est continue sur $[0,\pi]$.

Donc $I = \int_0^{\pi}\ln(a^2 - 2a\cos t + 1)\,dt = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1}\ln\left(a^2 - 2a\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right)$.

Donc $I = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n}\ln\left[\prod\limits_{k=1}^{n-1}\left(a^2 - 2a\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right)\right] = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n}\ln\left(\frac{a^{2n}-1}{a^2-1}\right)$ d'après 1).

Si $|a| < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a^{2n} = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{a^{2n}-1}{a^2-1}\right) = -\ln(1-a^2)$.

Donc $I = 0$ si $|a| < 1$.

Si $|a| > 1$, alors $\ln\left(\frac{a^{2n}-1}{a^2-1}\right) = 2n\ln|a| - \ln(a^2-1) + \ln\left(1 - \frac{1}{a^{2n}}\right)$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} a^{2n} = +\infty$.

Donc $I = 2\pi\ln|a|$ si $|a| > 1$.

Exercice 12

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et l'application Φ qui à tout polynôme $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ associe le reste de la division euclidienne de $(X^n - X)P$ par $X^n - 1$.

1) Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$.
2) Déterminer son noyau et son image.

Solution :

1) Pour tout $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$, il existe un unique couple de polynômes (Q,R) tel que : $(X^n - X)P(X) = (X^n - 1)Q(X) + R(X)$ avec $d°R < n$. Et $\Phi(P) = R$.
   Donc Φ est une application de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{C}_{n-1}[X]$.
   Soient P_1 et P_2 deux polynômes de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$, et α un complexe.
   $(X^n - X)P_1(X) = (X^n - 1)Q_1(X) + R_1(X)$ avec $d°R_1 < n$. Et $\Phi(P_1) = R_1$.
   $(X^n - X)P_2(X) = (X^n - 1)Q_2(X) + R_2(X)$ avec $d°R_2 < n$. Et $\Phi(P_2) = R_2$.
   $(X^n - X)[\alpha P_1(X) + P_2(X)] = (X^n - 1)[\alpha Q_1(X) + Q_2(X)] + \alpha R_1(X) + R_2(X)$.
   $(X^n - X)(\alpha P_1 + P_2)(X) = (X^n - 1)[\alpha Q_1(X) + Q_2(X)] + (\alpha R_1 + R_2)(X)$.
   Or : $d°(\alpha R_1 + R_2) \le \mathrm{Max}(d°\alpha R_1, d°R_2) \le \mathrm{Max}(d°R_1, d°R_2) < n$.
   Donc $\alpha R_1 + R_2$ est le reste de la division euclidienne de $(X^n - X)(\alpha P_1 + P_2)$ par $X^n - 1$. Donc $\Phi(\alpha P_1 + P_2) = \alpha R_1 + R_2 = \alpha\Phi(P_1) + \Phi(P_2)$.
   $\boxed{\text{Donc } \Phi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{C}_{n-1}[X].}$
2) Un polynôme P appartient à $\mathrm{Ker}\,\Phi$ si et seulement si $\Phi(P) = 0$, donc si et seulement si $(X^n - X)P(X)$ est divisible par $X^n - 1$.
   Or $X^n - X = X(X^{n-1} - 1) = X\prod_{k=0}^{n-2}(X - e^{2ik\pi/(n-1)})$ et $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(X - e^{2ik\pi/n})$.
   La seule racine commune à $X^n - X$ et $X^n - 1$ est 1. En effet, si $e^{2ik\pi/(n-1)} = e^{2ij\pi/n}$ avec $k \in [\![0, n-2]\!]$ et $j \in [\![0, n-1]\!]$, alors $\dfrac{2k\pi}{n-1} = \dfrac{2j\pi}{n}$ car ils sont dans $[0, 2\pi[$, donc $nk = j(n-1)$. Or n et $n-1$ sont premiers entre eux. Donc n divise j et $n-1$ divise k. Donc $k = j = 0$.
   Donc $\prod_{k=1}^{n-1}(X - e^{2ik\pi/n})$ est premier avec $X^n - X$, donc divise P si $P \in \mathrm{Ker}\,\Phi$.
   Or $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$. Donc P est de la forme $P(X) = a\prod_{k=1}^{n-1}(X - e^{2ik\pi/n}) = a\dfrac{X^n - 1}{X - 1}$.
   La réciproque est évidente car si $P(X) = a\dfrac{X^n - 1}{X - 1}$, alors $(X-1)P(X)$ est divisible par $X^n - 1$. Or $(X^n - X)P(X) = X(X^{n-2} + ... + X + 1)(X-1)P(X)$.
   Donc $(X^n - X)P(X)$ est divisible par $X^n - 1$. Donc $P \in \mathrm{Ker}\,\Phi$.
   Donc $\boxed{\mathrm{Ker}\,\Phi = \mathrm{Vect} < X^{n-1} + ... + X + 1 >}$ Donc $\dim \mathrm{Ker}\,\Phi = 1$.
   Donc d'après le théorème du rang : $\dim \mathrm{Im}\,\Phi = \dim \mathbb{C}_{n-1}[X] - \dim \mathrm{Ker}\,\Phi = n - 1$.
   De plus $\mathrm{Im}\,\Phi = \mathrm{Vect} < \Phi(1), \Phi(X), ..., \Phi(X^{n-1}) >$.
   Or si $k \in [\![0, n-2]\!]$: $(X^n - X)X^k = (X^n - 1)X^k + X^k(1 - X)$ et $d°X^k(1-X) < n$.
   Donc $\Phi(X^k) = X^k(1 - X)$ si $k \in [\![0, n-2]\!]$.
   Cette famille est libre car la famille $(1, X, ..., X^{n-2})$ est libre. Elle comprend $n-1$ vecteurs. Donc c'est une base de $\mathrm{Im}\,\Phi$ car $\dim \mathrm{Im}\,\Phi = n - 1$.
   Donc $\mathrm{Im}\,\Phi = \mathrm{Vect} < 1 - X, X(1-X), ..., X^{n-2}(1-X) >$.
   Donc $\boxed{\mathrm{Im}\,\Phi = (1 - X)\mathbb{C}_{n-2}[X]}$