Problème 1

Maths

Sujet proposé par *Sopheak TOUCH*

Formule de Stirling

L'objet de ce problème est de déterminer un équivalent de n!

1. Soit (I_n) où $n \in IN$, la suite définie par : ∀ n ∈ IN, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n(t)dt$

a. Déterminer, ∀ n ∈ IN, une relation entre I_{n+2} et I_n

b. En déduire, pour tout entier n, la valeur de I_{2p} et I_{2p+1} en fonction de p.

2. a. Montrer que la suite (I_n) est décroissante, puis convergente. En déduire que :

$$\forall n \in IN^*, \frac{n}{n+1} \leq \frac{I_n}{I_{n-1}} \leq 1$$

Calculer alors la limite de la suite $\left(\frac{I_n}{I_{n-1}}\right)$ où $n \in IN^*$ lorsque n tend vers $+\infty$.

b. Soit (S_n) où $n \in IN^*$ la suite définie par :

$$\forall n \in IN^*, S_n = n.I_n.I_{n-1}$$

Etudier le sens de variation de (S_n), puis en déduire un équivalent de I_n.

c. A l'aide des résultats précédentes, établir que :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n (n!)^4}{n((2n)!)^2} = \pi$$

3. Soit à présent la suite $(U_n)_{n\in IN^*}$ d'définie par :

$$\forall n \in IN^*, U_n = \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}$$

On note alors $(V_n)_{n\in IN^*}$ et $(W_n)_{n\geq 2}$ les suites définie par :

$$\begin{cases} \forall n \in IN^*, & V_n = \ln(U_n) \\ \forall n \geq 2, & W_n = V_n - V_{n-1} \end{cases}$$

a. Déterminer un équivalent de W_n

b. En déduire que la suite $(U_n)_{n\in IN^*}$ converge vers une limite non nulle que l'on notera λ

Donner alors un équivalent de $n!$ en fonction de λ

c. A l'aide des résultats précédents, en déduire la formule de Stirling :

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$