I. Sujet d'analyse :

On considère la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par :
1. Montre que, la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est bien définie et à termes positifs.
2. a) Étudier la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ pour $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\forall x \geq 0, f_n(x) = x^2 - x - \frac{1}{2^n}$$

b) Montrer que l'équation $x^2 - x - \frac{1}{2^n} = 0$ possède, sur $\mathbb{R}_+$, une unique solution que l'on note α_n.
3. a) Étudier le signe de $f_n(x) - f_{n+1}(x)$.
b) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
c) Étabir, pout tout entier n supérieur ou égal à 2, l'inégalité suivante : $v_n \geq \alpha_n$.
d) En déduire que la suite $(v_n)_{n\geq 2}$est décroissante.
4. a) Monter que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$converge.
b) Déterminer la valeur de sa limite.

I. Solution d'analyse

1. Pour nontre que, la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est bien définie et à termes positifs, il suffit de regarder le deux premiers termes de $v_n$et il est évident que tous les termes sont positifs and bien définis.

2. a) f_n est une fonction polynôme donc dérivable. On a : $f_n'(x) = 2x - 1$, d'où le tableau de variation de f_n sur $\mathbb{R}_+$. (tableau de variation)

2. b) Sur$[0, \frac{1}{2}]$ et même sur $[0, 1]$, la fonction est strictement négative et donc ne s'annule pas. En revanche sur $[1, +\infty[$, f_n est strictement croissante et continue, elle réalise donc une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[-1/2\hat{}n, +\infty[$. Le nombre 0 appartient à l'ensemble d'arrivée et possède donc un unique antécédent α_n, avec $\alpha_n > 1$.

3. a) On a $f_n(x) - f_{n+1}(x) = -\frac{1}{2^{n+1}}$ et donc $f_n(x) - f_{n+1}(x) < 0$.

3. b) En appliquant l'inégalité précédente en α_{n+1} on obtient : $f_n(\alpha_{n+1}) \leq f_{n+1}(\alpha_{n+1})$, soit $f_n(\alpha_{n+1}) \leq 0$, c'est-à-dire $f_n(\alpha_{n+1}) \leq f_n(\alpha_n)$. Comme sur l'intervalle considéré la fonction f_n est strictement croissante, on en déduit que $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$ et la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien décroissante.

3. c) * α_2 est la solution positive de l'équation $X^2 - 2x - \frac{1}{4} = 0$. On trouve $\alpha_2 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ tandis que $v_1 = 1$ et que $v_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4}$. Or $(1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2} < 6$, donc $\alpha_2 < \alpha_3$.

* Supposons que pour un certain n supérieur ou égal à 2, on ait : $\alpha_n \leq v_n$. Alors : $\alpha_{n+1} = \sqrt{\alpha_n + \frac{1}{2^n}} \leq \sqrt{v_n + \frac{1}{2^n}} = v_{n+1}$, et comme la suite (α_n) est décroissante on a a fortiori : $\alpha_{n+1} \leq v_{n+1}$. On conclut par le principe de récurrence : $\forall n \geq 2, \alpha_n \leq v_n$.

3. d) En appliquant f_n qui, sur l'intervalle considéré, est croissante, on obtient : $0 = f_n(\alpha_n) \leq f_n(v_n)$. On a donc $v_n^2 - v_n - \frac{1}{2^n} \geq 0$, a fortiori $v_n^2 v_{n+1}^2$. Comme tout est positif il vient $v_n v_{n+1}$ à la suite $(v_n)_{n\geq 2}$ est décroissante.

4. a) La suite est décroissante à partir du rang 2 et minorée par $\frac{1}{2}$ ou même par 1, elle est donc covergente de limite notée l.

4. b) On sait que $v_{n+1} = \sqrt{v_n + \frac{1}{2^n}}$. En passant à la limite, on obtient $l = \sqrt{l}$, soit $l^2 - l = 0$. Cette équation possède deux solutions 0 et 1. Comme 0 est à rejeter, il reste $l = 1$.