

Exercice Oral

Sujet proposé par Se Dara

Calcul de l'intégrale de Gauss

Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, on note : $f: (x, y) \mapsto e^{-(x^2+y^2)}$

$$D_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq a^2\}, \quad \Delta_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| \leq a, |y| \leq a\}$$

$$I_a = \iint_{D_a} f, \quad J_a = \iint_{\Delta_a} f$$

1. Calculer I_a , pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$
2. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$: $I_a \leq J_a \leq I_{a\sqrt{2}}$
3. En déduire :

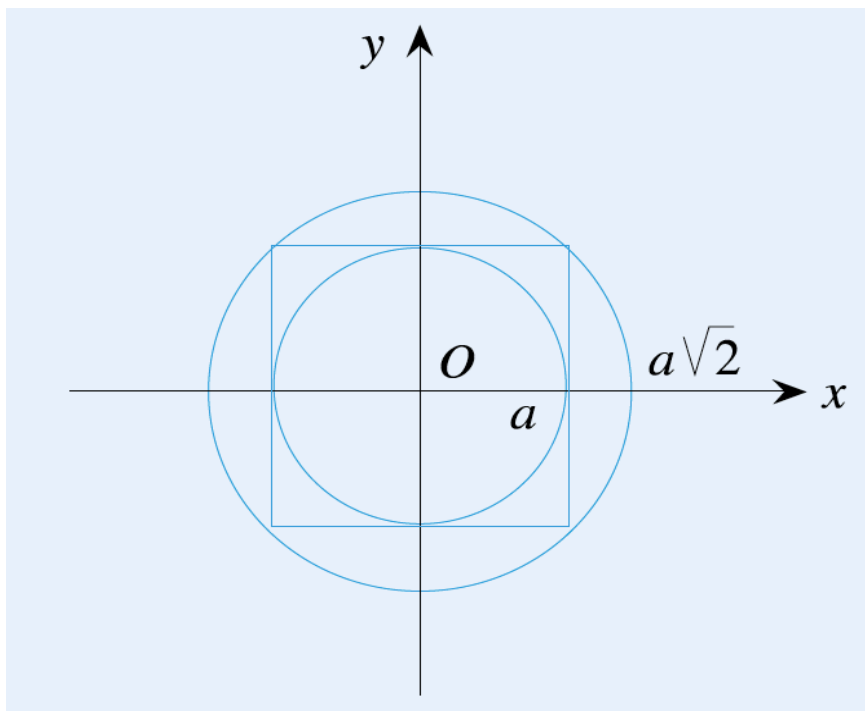
$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Prouve :

1. En passant en polaire :

$$I_a = \iint_{[-\pi, \pi] \times [0, a]} e^{-r^2} r \, d\theta dr = \pi(1 - e^{-a^2})$$

2. Comme $D_a \leq \Delta_a \leq D_{a\sqrt{2}}$ (Faire le schéma) et $f \geq 0$, on a : $I_a \leq J_a \leq I_{a\sqrt{2}}$



3. Après les questions 1 et 2, $\pi(1 - e^{-a^2}) \leq J_a \leq \pi(1 - e^{-2a^2})$
 En utilisant le théorème d'encadrement, on obtient : $J_a \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} \pi$

D'autre part, pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$,

$$J_a = \iint_{[-a,a]^2} e^{-y^2} e^{-x^2} dy dx = \left(\int_{-a}^a e^{-x^2} dx \right)^2 \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} \pi$$

Comme, $\int_{-a}^a e^{-x^2} dx \geq 0$ et la fonction e^{-x^2} est une fonction paire,

Donc

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$