Exercice Oral

Sujet proposé par **Se Dara**

Irrationnel de π

1. Pour $(a, b, n) \in (\mathbb{N}^*)^3$, on note
$$P_n = \frac{1}{n!} X^n (bX - a)^n$$
et
$$I_n = \int_0^{\pi} P_n(x) \sin(x) dx$$
   a. Montrer que, pour tout $(a, b, n) \in (\mathbb{N}^*)^3$, P_n et ses dérivées successives prennent en 0 et $\frac{a}{b}$ des valeurs entières (dans $\mathbb{Z}$).
   b. Montrer que, pour $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ fixé : $I_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.
2. On suppose qu'il existe $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $\pi = \frac{a}{b}$.
   a. Avec les notation de la question 1 montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n \in \mathbb{Z}$.
   b. Déduire une contradiction.

(Lemme 1: Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à termes dans $\mathbb{Z}$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si et seulement si elle est stationnaire (c'est-à-dire : il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $(u_n)_{n \geq N}$ soit constante).)

On a ainsi démontré que π est irrationnel.

Prouve

1. Pour $(a, b, n) \in (\mathbb{N}^*)^3$, on note
$$P_n = \frac{1}{n!} X^n (bX - a)^n$$
et
$$I_n = \int_0^{\pi} P_n(x) \sin(x) dx$$
   a. D'après la formule de Leibniz :
$$P_n^{(k)} = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (X^n)^i ((bX - a)^n)^{(k-i)}$$
   On a, pour tout $i \in \mathbb{N}$:
$$(X^n)^{(i)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq n \\ n! & \text{si} \quad i = n \end{cases}$$
   et
$$((bX - a)^n)^{(k-i)} \left(\frac{a}{b}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq n \\ b^n n! & \text{si} \quad i = n \end{cases}$$
   On va étudier en deux cas :

- Si $k < n$, alors, pour tout $i \in \{0, \dots, k\}$, $(X^n)^{(i)}(0) = 0$ et $((bX-a)^n)^{(k-i)}\left(\frac{a}{b}\right) = 0$. On a donc $P_n^{(k)}(0) = P_n^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right) = 0 \in \mathbb{Z}$
- Si $k \geq n$, alors :

$$\begin{cases} P_n^{(k)}(0) = \dfrac{1}{n!}\dbinom{k}{n} n!\,((bX-a)^n)^{(k-i)}(0) \in \mathbb{Z} \\ P_n^{(k)}\left(\dfrac{a}{b}\right) = \dfrac{1}{n!}\dbinom{k}{k-n}(X^n)^{(k-n)}\left(\dfrac{a}{b}\right) b^n n! \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

b. Notons $M = \text{Sup}_{x\in[0;\pi]}|bx-a|$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|I_n| \leq \frac{1}{n!}\int_0^{\pi} x^n(bx-a)^n dx \leq \frac{1}{n!}\pi^{n+1}M^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On déduit donc : $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

2. On suppose qu'il existe $(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $\pi = \frac{a}{b}$.

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On intègre I_n par parties, de façon itérée :

$$I_n = [-P_n(x)\cos(x)]_0^{\pi} + [P_n{}'(x)\sin(x)]_0^{\pi} + [-P_n{}''(x)\cos(x)]_0^{\pi} + \cdots + \left[(-1)^{n+1}P_n^{(2n)}(x)\cos(x)\right]_0^{\pi},$$

puisque P_n est de degré $2n$, et donc $P_n^{(2n+1)} = 0$.

Comme $P_n, P_n{}', P_n{}'', \dots, P_n^{(2n)}$ prennent en 0 et $\pi = \frac{a}{b}$ des valeurs entières après la question 1 et que $\cos(x)$ et $\sin(x)$ prennent aussi en 0 et $\frac{a}{b}$ des valeurs entières (0 ou -1). Ainsi, on a donc : $I_n \in \mathbb{Z}$.

b. Comme $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et converge vers 0. En utilisant, le lemme 1, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que : $\forall n \geq N, I_n = 0$. En particulier : $I_{2n} = 0$. Mais l'application $x \longmapsto P_{2N}(x)\sin(x)$ est continue sur $[0;\pi]$ et à valeurs positifs (car $\frac{a}{b} = \pi$ et $2N$ est pair). Il en résulte : $\forall x \in [0;\pi], P_{2N}(x)\sin(x) = 0$. En particulier $P_{2N}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, en contradiction avec : $P_{2N}\left(\frac{\pi}{2}\right) = P_{2N}\left(\frac{a}{2b}\right) = \frac{1}{(2N)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{4N} > 0$.

Cf. ***Jean-Marie Monier***, « *Les Méthodes et Exercices de Mathématiques MPSI* », DUNDOD.