Corriger de l'exercice proposé pour préparer les oraux de concours des Grandes Écoles

Par : **Angkeara SVAY**

1- (a) Supposons P_{AB} et P_{BA}, respectivement les polynômes caractéristiques des matrices AB et BA

On a $\quad BAB - \lambda B = B(AB - \lambda I)$

On obtient donc $\quad \det(BAB - \lambda B) = \det(B)P_{AB}(\lambda)$

D'autre part, on écrit : $\quad BAB - \lambda B = (BA - \lambda I)B$

ce qui implique : $\quad \det(BAB - \lambda B) = P_{BA}(\lambda)\det(B)$

On en déduit : $\quad P_{AB} = P_{BA}$

(b) Soit $x \in E_\lambda$, c'est-à-dire : $f \circ g = \lambda x$. On écrit :

$$g \circ f(g(x)) = g(f \circ g(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x)$$

On déduit donc : $\quad g(x) \in F_\lambda$, ce qui implique : $\quad g(E_\lambda) \subset F_\lambda$

Même façon, en changeant les rôles de f et g, on obtient également : $\quad f(F_\lambda) \subset E_\lambda$

(c) Comme f et g sont des isomorphismes, ils conservent la dimension, c'est-à-dire :

$$dim(g(E_\lambda)) = dim(E_\lambda) \quad \text{et} \quad dim(f(F_\lambda)) = dim(F_\lambda)$$

Avec les résultats de la question (b), on a ainsi :

$$dim(g(E_\lambda)) \leq dim(F_\lambda) \quad \text{et} \quad dim(f(F_\lambda)) \leq dim(E_\lambda)$$

On déduit donc :

$$dim(E_\lambda) \leq dim(F_\lambda) \quad \text{et} \quad dim(F_\lambda) \leq dim(E_\lambda)$$

Conclusion : les espaces propres E_λ et F_λ ont la même dimension.

(d) Soient $\lambda_1, ..., \lambda_p$ les valeurs propres de $f \circ g$. Comme $f \circ g$ est diagonalisable, on a :

$$dim(E_{\lambda_1}) + ... + dim(E_{\lambda_p}) = n$$

Le résultat de la question précédent donne :

$$dim(F_{\lambda_1}) + ... + dim(F_{\lambda_p}) = n$$

Alors, la somme des dimensions des sous-espaces propres de $g \circ f$ est (au moins) égale à n. On conclure donc que $g \circ f$ est diagonalisable.

2-(a) Supposons que 0 est une valeur propre de $f \circ g$, on a ainsi $det(AB) = 0$. Mais on a en même temps $det(AB) = det(BA) = 0$. Il est donc bien claire que 0 est aussi une valeur propre de $g \circ f$.

(b) On a :

$$(AB - \alpha I)D = I \qquad \text{implique} \qquad ABD = I + \alpha D$$

On introduit un développement :

$$(BA - \alpha I)(BDA - I) = B(ABD)A - BA - \alpha BDA + \alpha I$$

$$= BA + \alpha BDA - BA - \alpha BDA + \alpha I$$
$$= \alpha I$$

Comme le déterminant $det(\alpha I)$ est toujours non nul, on déduit donc que le déterminant $det(BA - \alpha I)$ n'est non plus nul.
Donc, la matrice $BA - \alpha I$ est inversible.

(c) On va démontrer par contra-posée. Supposons que α n'est pas une valeur propre de $f \circ g$, alors $AB - \alpha I$ est inversible. D'après la question (c), on a aussi $BA - \alpha I$ est inversible, c'est-à-dire que α n'est non plus une valeur propre de $g \circ f$. Par contra-posée, on déduit que toute valeur propre de $g \circ f$ est une valeur propre de $f \circ g$. De même façon, en changeant les rôles de f et g, on conclure que $g \circ f$ et $f \circ g$ ont les mêmes valeurs propres.

(d) Travailler simplement en dimension 2 avec des matrices non-inversibles. On prend :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui donne :

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a donc BA et diagonalisable mais AB ne l'est pas.