Exercice Oral
Sujet proposé par **Se Dara**

Étude d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Soient $n \in \mathbb{N}^*, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts.
On note $D = diag(a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et on considère l'application

$$f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \qquad M \longrightarrow f(M) = DM - MD$$

a) Vérifier que f est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
b) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$.
c) Montrer que $\mathrm{Im}(f)$ est l'ensemble F des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les termes diagonaux sont nuls.

Prouve :

a) Comme un endomorphisme d'espace vectoriel E est une application linéaire $f: E \to E$, on vérifie donc que f est une application linéaire. Soit $a \in \mathbb{K}$ et $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $f(aM + N) = D(aM + N) - (aM + N)D = a(DM - MD) + (DN - ND) = af(M) + f(N)$. Donc f est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

b) Soit $M = \left(m_{i,j}\right)_{n\times n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a : $M \in Ker(f) \Leftrightarrow f(M) = 0 \Leftrightarrow DM = MD$. Alors : $\forall\, i, j \in \{1, \dots, n\}, (DM)_{ij} = (MD)_{ij} \Leftrightarrow \forall\, i, j \in \{1, \dots, n\}$, $\sum_{k=1}^{n}(D)_{ik}(M)_{kj} = \sum_{k=1}^{n}(M)_{ik}(D)_{kj} \Leftrightarrow \forall\, i, j \in \{1, \dots, n\}, a_i m_{ij} = m_{ij} a_i \Leftrightarrow \forall\, i, j \in \{1, \dots, n\}, m_{ij} = 0$ pour tout $i \neq j$, car $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ sont deux à deux distincts. Donc $\mathrm{Ker}(f)$ est un ensemble de matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

c) Il est évident qu'un ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ à termes diagonaux tous nuls F est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On va montrer que $\mathrm{Im}(f) = F$. On montre d'abord $\mathrm{Im}(f) \subset F$. Soit $M = \left(m_{i,j}\right)_{n\times n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, , $\left(f(M)\right)_{ij} = (DM - MD)_{ij} = a_i m_{ii} - m_{ii} a_i = 0$. Alors $f(M) \in F$. Ainsi, $\mathrm{Im}(f) \subset F$. On a : $\dim\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\right) = \dim\left(\mathrm{Im}(f)\right) + \dim\left(\mathrm{Ker}(f)\right)$ (***le théomère de rang***). Alors, $\dim\left(\mathrm{Im}(f)\right) = \dim\left(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\right) - \dim\left(\mathrm{Ker}(f)\right) = n^2 - n$. Comme, $\dim(F) = n^2 - n$, car une base de F est une famille de matrice élémentaires E_{ij} pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$ et $i \neq j$. On conclut : $\mathrm{Im}(f) = F$.