EXERCICE ORAL

Sujet proposé par **HUY Seav Er**

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soient A et R deux matrices carrées réelles d'ordre n. On dit que R est une racine carrée de A si $R^2 = A$.

1. a) Soit θ un réel quelconque et $R(\theta)$ la matrice : $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.
Calculer le carré de cette matrice et en déduire que la matrice identité d'ordre 2 admet une infinité de racines carrées.

b) Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'a pas de racine carrée.

2. a) Donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $t \mapsto \sqrt{1+t}$.

b) Soit N une matrice carrée d'ordre n telle que $N^4 = 0$. Déduire de la question précédente une racine carrée de la matrice $I + N$.

3. Soit f et g deux endomorphismes de $\mathbb{R}^n$. On suppose que $f \circ g = g \circ f$ et que f admet n valeurs propres réelles distinctes.

a) Montrer que tout sous-espace propre de f est stable par g.

b) Montrer que tout vecteur propre de f est vecteur propre de g.

c) Justifier que f et g sont diagonalisables.

d) Soit A la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Combien A admet-elle de racines carrées ?

Solution :

1. a) Un calcul simple donne : $R^2(\theta) = I_2$. Ainsi, I_2 admet une infinité de racines carrées.

b) On peut se contenter d'écrire $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = 0$ et de faire les calculs : il vient $c = a = d = 0$ et $b(a+d) = 1$. L'impossibilité est claire.

2. a) On trouve : $\sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{6} + \frac{t^3}{16} + o(t^3)$

b) La question précédente donne : $(1+t) - (1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{6} + \frac{t^3}{16})^2 = o(t^3)$

et comme il s'agit de fonctions polynômes : $(1+t)-(1+\frac{t}{2}-\frac{t^2}{6}+\frac{t^3}{16})^2 = t^4Q(t)$, avec $Q \in \mathbb{R}[t]$.

c) Si $N^4 = 0$, alors, en remplaçant formellement t par N, il vient :

$$I + N = (I + \tfrac{1}{2}N - \tfrac{1}{6}N^2 + \tfrac{1}{16}N^3)^2 + 0.Q(N)$$

ce qui donne une racine carrée de $I + N$, à savoir : $I + \frac{1}{2}N - \frac{1}{6}N^2 + \frac{1}{16}N^3$.

3. a) Soit λ scalaire et x vecteur non nul tels que $f(x) = \lambda x$. Alors :

$$f(g(x)) = g(f(x)) = \lambda g(x)$$

ce qui montre que $g(x)$ appartient au sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ.

b) Le sous-espace propre $E_{(\lambda)}(f)$ étant de dimension 1, il existe μ (éventuellement nul) tel que $g(x) = \mu x$. Ainsi, x est vecteur propre de g.

c) On sait que $E = \bigoplus_{i=1}^{n} E_{(\lambda)}(f)$. Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une base de vecteurs propres de f. Par la question précédente, c'est également une base de vecteurs propres de g ; d'où f et g sont diagonalisables et même « co »-diagonalisables.

d) Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$. Alors $AB = B^3 = BA$. Par la question précédente, il existe une matrice P inversible et deux matrices diagonales D_1, D_2 telles que :

$$A = PD_1P^{-1}, \quad B = PD_2P^{-1}$$

$B^2 = A$ est alors équivalent à $D_1 = D_2^2$. Ainsi, les éléments diagonaux de D_2 sont les carrés de ceux de D_1.

⋆ Si les valeurs propres de f sont toutes strictement positives, il y a 2^n possibilités pour D_2, donc 2^n racines carrées pour A.

⋆ Si elles sont toutes positives et l'une nulle, il y a 2^{n-1} racines carrées pour A.

Sinon, on pert la réalité du problème et A n'a aucune racine carrée.