CONCOURS D'ADMISSION 2018 Session d'automne

FILIÈRE UNIVERSITAIRE INTERNATIONALE

MATHÉMATIQUES

(Durée : 2 heures)

Les trois parties (Exercices 1 et 2, Problème) sont indépendantes.
L'utilisation des calculatrices est interdite dans cette épreuve

⋆ ⋆ ⋆

Exercice 1

Soit a et b deux nombres réels avec $a < b$ et soit f une fonction dérivable de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. On suppose que f' est bornée sur $[a, b]$ et on pose $K = \sup_{t\in[a,b]} |f'(t)|$.

1.1 Montrer qu'on a

$$\forall t \in [a, b] : |f(t)| \leq K(t - a) \quad \text{et} \quad \forall t \in [a, b] : |f(t)| \leq K(b - t). \tag{1}$$

1.2 Calculer $\int_a^{(a+b)/2} (t - a)dt$.

1.3 En utilisant les questions précédentes, montrer qu'on a

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq K\frac{(b-a)^2}{4}.$$

Exercice 2

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles 3×3. On considère les quatre matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix},\ P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.1 Soit $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que l'ensemble

$$\mathcal{C}(B) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : BM = MB\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

2.2 Déterminer $\mathcal{C}(D)$.

2.3 Calculer les produits PQ et PDQ.

2.4 Soit Φ_P l'application de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui associe à toute matrice N la matrice $P^{-1}NP$. L'application Φ_P est une application linéaire de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$; on ne demande pas de le démontrer. Déterminer le produit de composition $\Phi_{P^{-1}} \circ \Phi_P$ qui associe à toute matrice $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice $\Phi_{P^{-1}}(\Phi_P(N))$.

2.5 En considérant l'image de $\mathcal{C}(A)$ par Φ_P et en utilisant les questions précédentes, déterminer la dimension de $\mathcal{C}(A)$.

Problème

Le but du problème est l'étude de la suite récurrente non linéaire $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$u_0 = 0,\ u_1 = L \ \text{ et, pour } n \geq 0 \colon u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}, \tag{2}$$

où L est un nombre réel strictement positif. On note m le minimum des deux nombres 1 et L, et M le maximum de ces deux nombres.

Dans la Partie A, on étudie les premières propriétés de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$; dans la partie B, qui est indépendante de la Partie A, on étudie une suite récurrente linéaire auxiliaire, et dans la Partie C, on termine l'étude de la suite initiale $(u_n)_{n\geq 0}$.

Partie A, Premières propriétés de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$

A.1 Montrer que pour $n \geq 1$, on a $m \leq u_n \leq 4M$.

A.2 En supposant que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge, déterminer la valeur de sa limite.

Partie B, Une suite récurrente linéaire auxiliaire

Dans cette partie, K désigne un nombre réel de l'intervalle $]0, 1/2[$.

B.1 Soit f le polynôme quadratique défini par $f(x) = x^2 - Kx - K$. Calculer $f(-1)$, $f(0)$ et $f(1)$ et montrer que f a deux racines réelles (ou, en d'autres termes, l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions réelles), que l'on notera $c < C$.

B.2 Soit H un nombre strictement positif. On considère une suite $(v_n)_{n\geq 0}$ qui satisfait

$$0 \leq v_0 \leq H,\ 0 \leq v_1 \leq HC \ \text{ et, pour } n \geq 0 \colon v_{n+2} = K\left(v_{n+1} + v_n\right). \tag{3}$$

Montrer que pour tout $n \geq 0$ on a $0 \leq v_n \leq HC^n$.

B.3 Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ converge.

PARTIE C, Fin de l'étude de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$

C.1 Montrer que pour $n \geq 0$ on a

$$|u_{n+2} - 4| \leq \frac{|u_{n+1} - 4|}{\sqrt{u_{n+1}} + 2} + \frac{|u_n - 4|}{\sqrt{u_n} + 2}. \tag{4}$$

C.2 Soit $K = 1/(\sqrt{m} + 2)$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ une suite récurrente linéaire telle que $w_0 \geq 4$, $w_1 \geq |L - 4|$ et, pour $n \geq 2$: $w_{n+2} = K(w_{n+1} + w_n)$. Montrer que pour tout $n \geq 0$, on a $|u_n - 4| \leq w_n$.

C.3 En utilisant les questions précédentes, montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ converge.