Maths

Sujet proposé par *Angkeara SVAY*

Q1 : Pour $n \geq 2$, calculer : $\prod_{k=1}^{n-1}(1-e^{2ik\pi/n})$

a) $\frac{n\pi}{2}$ b) $2\pi n$ c) n d) $2n-1$

Q2 : Soit $a>0$ et $D := \{(x,y)\in\Re^2;\ y\geq 0\ et\ x^2+y^2\leq ax\}$. Calculer l'intégrale : $I := \iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy$

a) $a^3\left(\frac{\pi}{6}-\frac{2}{9}\right)$ b) $a^2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{9}\right)$ c) $a^3\left(\frac{\pi}{5}-\frac{3}{7}\right)$ d) $a^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{5}\right)$

Q3 : Pour $a>0$, la nature de la série de terme général $u_n := \cos(n^{-a})-1$ est convergente quand :

a) $a<1$ b) $a<0$ c) $a>\frac{1}{2}$ d) $a>\frac{1}{3}$

Q4 : Dans une base canonique (e_1,e_2,e_3) de $\Re^3$, on donne un plan P ayant pour équation : $x-y-z=0$ et une droite D ayant pour équation : $x=-y=z$. Déterminer la matrice de la projection $[p]$ sur le plan P parallèlement à la droite D.

a) $[p]=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-1\\-1&1&2\end{pmatrix}$ b) $[p]=\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&0&-1\\1&0&-2\end{pmatrix}$ c) $[p]=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}$ d) $[p]=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&-1&-1\\1&2&-1\end{pmatrix}$

Q5 : Pour une application $f\in E=C^0([0,1],\Re)$, on pose une série $g(f)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}f\left(\frac{1}{n}\right)$. On a :

a) g est absolument convergente b) g est conditionnellement convergente
c) g est divergente c) on ne peut pas conclure sur la nature de g

Q6 : Pour une application $f\in E=C^0([0,1],\Re)$, on pose une série $g(f)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}f\left(\frac{1}{n}\right)$. On a :

a) g est continue b) g est discontinue

c) g est conditionnellement continue c) on ne peut pas conclure sur la continuité de g

Q7 : Pour $u \in]0,1[$, écrire l'intégrale $I := \int_0^1 \frac{\ln^2 u}{1-u} du$ sous forme de somme de série :

a) $I = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ b) $I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ c) $I = (2n+1)\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ d) $I = 3\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3+n^2+1}$

Q8 : On pose $z = e^{2i\pi/7}$, $s = z + z^2 + z^4$ et $s = z^3 + z^5 + z^6$. Calculer $s+t$ et st.

a) -2 et 1 b) -3 et -2 c) 1 et -2 d) -1 et 2

Q9 : Calculer la limite : $\lim_{n\to\infty}\left(n^{-3/2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n+k}\right)$

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}\left(2^{2/5}+1\right)$ c) $\frac{3}{2}\left(2^{2/5}-1\right)$ d) $\frac{2}{3}\left(2^{3/2}-1\right)$

Q10 : Pour $z_1, z_2, \ldots, z_n$ les racines complexes simples du polynomial d'ordre n supérieur ou égale à 2 : $P_n := x^n - x + 1$, calculer le déterminant de la matrice :

$$M := \begin{pmatrix} 1+z_1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1+z_2 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & \ldots & 1+z_n \end{pmatrix}$$

a) -2^n b) $2(-1)^n$ c) -1 d) $(-2)^n$