**Q1)** Soit $x \in \mathbb{R}$ et $E(x)$ est défini comme la partie entière de $x$ ( Par exemple, $E(4,5) = 4$). Déterminer

$$\inf_x \left( E(x^2 + x + 1) + E(\frac{1}{x^2 + x + 1}) \right)$$

a) 0
b) 1
c) $+\infty$
d) a, b et c sont faux.

**Q2)** Déterminer la limite de la suite définie par son terme général :

$$(\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{n+k}}) - n$$

Indication : Vous pouvez utiliser l'inégalité : $0 \leq e^x - x - 1 \leq \frac{x^2}{2} e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
a) ln2
b) 1
c) e
d) a,b et c sont faux.

**Q3)** Quelle est l'infirmation correcte pour l'équation $x^2 + 7y^2 = 5$ (*) ?
a) (*) admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$.
b) (*) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$.
c) (*) admet des solution dans $\mathbb{N}^2$.
d) a, b et c sont faux.

**Q4)** Trouver tous les $n \in \mathbb{Z}$ tels que $n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 5$ soit premier. i.e le nombre premier est un entier stritement positif qui n'est divisé que par 1 et lui-même.
a) Il n'existe pas de solution.
b) Il existe une unique solution $n = 0$.
c) $n$ est impair.
d) a, b et c sont faux.

**Q5)** Soient a, b deux zéros distincts de $z^3 + 7z^2 + z + 1 = 0$ ( inconnue $z \in \mathbb{C}$). Quelle est la valeur $ab^2 + a^2b + 7ab$ ?
a) 0
b) 1
c) la valeur est en fonction de a et b.
d) a, b et c sont faux.

**Q6)** Soit $f(x) = \frac{x^5}{1-5x+10x^2-10x^3+5x^4}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Calculer :

$$\sum_{n=1}^{2013} f(\frac{n}{2014})$$

a) 2014
b) $\frac{2013 \times 2014}{2}$

c) $2014^5$
d) a,b,c sont faux.

**Q7)** Soient A, B et C des angles triangulaires. Calculer la valeur maximum de l'expression $CosA + CosB + CosC$.
a) 2
b) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$
c) $\frac{3}{2}$
d) a,b et c sont faux.

**Q8)** Calculer $\prod_{k=1}^{n-1} \sin(\frac{k\pi}{2n})$ en utilisant le polynôme $x^{2n} - 1$.
a) $\frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$
b) $\frac{\sqrt{n}}{4^{n-1}}$
c) $\frac{\sqrt{n-1}}{2^n}$
d) a,b et c sont faux.

**Q9)** Soient $a$ et $b$ deux réels où $b$ est différent de zéro. Calculer

$$C = \sum_{k=0}^{n} ch(a + kb)$$

a) $C = ch(a + \frac{bn}{2})\frac{sh\frac{b(n+1)}{2}}{sh\frac{b}{2}}$
b) $C = sh(a + \frac{bn}{2})\frac{ch\frac{b(n+)}{2}}{sh\frac{b}{2}}$
c) $C = sh(a + \frac{bn}{2})\frac{ch\frac{b(n+1)}{2}}{ch\frac{b}{2}}$
d) a, b et c sont faux.

**Q10)** On pose :

$$P_n = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}((x^2 - 1)^n)$$

Calculer $P_n(1)$ et $P_n(-1)$.
a) $P_n(1) = (-1)^n$ et $P_n(-1) = (-1)^n$
b)$P_n(1) = 1$ et $P_n(-1) = -1$
c)$P_n(1) = 1$ et $P_n(-1) = (-1)^n$
d) a, b et c sont faux.

**Réponse**

**A1 :** La réponse b) est correcte. En posant $t = x^2 + x + 1$, $t$ est toujours strictement positif pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t.\frac{1}{t} = 1$. On a donc, $t \geq 1$ ou $\frac{1}{t} \geq 1$. Alors,

$$E(t) \geq 1 \text{ ou } E(\frac{1}{t}) \geq 1$$

Donc, $\inf_{t \in \mathbb{R}_+^*}(E(t) + E(\frac{1}{t})) = 1$. Prenez $t = 1.7$, vous allez obtenir la valeur infimum 1.

**A2 :** La réponse a) est correcte. En posant $u_n = (\sum_{k=1}^n e^{\frac{1}{n+k}}) - n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en appliquant l'inégalité dans l'indication,

$$\begin{aligned}
|u_n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}| &= \sum_{k=1}^n (e^{\frac{1}{n+k}} - 1 - \frac{1}{n+k}) \\
&\leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2(n+k)^2} e^{\frac{1}{n+k}} \\
&\leq n \frac{1}{2(n+1)^2} e^{\frac{1}{n+1}}
\end{aligned}$$

Le dernier terme tend vers 0 quand $n$ tend vers infini. D'autre part,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1 + \frac{k}{n}}$$

$$\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = ln2.$$

**A3 :** La réponse b) est correcte. c) est évidemment fausse car on ne peut trouver un couple $(x, y)$ dans $\mathbb{N}^2$ qui satisfait (*). Comme $x^2$ est toujours positif, donc $7y^2 \leq 5$. Pour $y \in \mathbb{N}, y = 0$ et alors, $x^2 = 5$. Donc, (*) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$.

**A4 :** La réponse est d). Posons $f(n) = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 5$. Si on prend $n = 0, f(0) = 5$ est premier. Donc, on peut éliminer la réponse a). De plus, si $n$ est impair, $f(n)$ est toujours pair et plus grand que 2. Alors, c) n'est pas la réponse. On a,

$$f(n) = (n+1)^4 + 4 = ((n+1)^2 + 2)^2 - 4(n+1)^2$$

$$= (n^2 + 1)((n+2)^2 + 1)$$

D'après la propriété d'un nombre premier, il faut que $n^2 + 1 = 1$ ou $(n+2)^2 + 1 = 1$. Donc, $n = \{-2, 0\}$.

**A5 :** b) est la bonne réponse. Soit c la troisième racine du polynôme. Alors, $ab = \frac{-1}{c}$ et $a + b + c = -7$. On remplace les deux termes dans l'expression, on a alors :

$$ab^2 + a^2b + 7ab = ab(a + b + 7) = (\frac{-1}{c})(-7 - c + 7) = 1.$$

**A6 :** La réponse est d). On peut simplier l'expression de $f(x) = \frac{x^5}{x^5+(1-x)^5}$. On vérifie bien que $f(x) + f(1-x) = 1$ Alors, la somme vaut $\frac{2013}{2}$.

**A7 :** La réponse est c). C'est facile de remarquer que la valeur maximale d'un calcul de angles est atteinte dans le cas d'un triangle équilateral où $A = B = C = \frac{\pi}{3}$. En utilisant les formules trigonométriques, on a :

$$CosA + CosB + CosC = 2Cos(\frac{A+B}{2})Cos(\frac{A-B}{2}) - 2Sin^2(\frac{C}{2}) + 1$$

$$= 2Sin(\frac{C}{2})(Cos(\frac{A-B}{2}) - Sin(\frac{C}{2})) + 1 \leq 2Sin(\frac{C}{2})(1 - Sin(\frac{C}{2})) + 1 \leq 2.(\frac{1}{4}) + 1 = \frac{3}{2}$$

L'égalité : $Cos\frac{A-B}{2} = 1$ et $Sin\frac{C}{2} = \frac{1}{2}$. Donc $A = B = C = \frac{\pi}{3}$.

**A8 :** La bonne réponse est a). En factorisant le polynôme donné $x^{2n} - 1$, on a

$$x^{2n} = 1 \Rightarrow x_k = e^{\frac{k\pi}{n}} \ \forall k = 0, 1, 2...., 2n-1.$$

On peut écrire alors :

$$x^{2n} - 1 = \prod_{k=0}^{2n-1} (x - e^{\frac{k\pi}{n}})$$

$$\frac{x^{2n}-1}{x^2-1} = \prod_{k=1}^{n-1}(x - e^{\frac{k\pi}{n}})(x - e^{\frac{-k\pi}{n}})$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^{2k} = \prod_{k=1}^{n-1}(x^2 - 2x\cos\frac{k\pi}{n} + 1)$$

En remplaçant $x = 1$, on a :

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin^2\frac{k\pi}{2n} = \frac{n}{4^{n-1}}$$

Donc,$\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}$. Vous pourrez également calculer $\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}$ en calculant de plus $\prod_{k=1}^{n-1}\cos\frac{k\pi}{2n}$ par la même méthode en remplaçant $x = -1$.

**A9 :** La bonne réponse est a). On profite de calculer la somme $S = \sum_{k=0}^{n} sh(a + kb)$. Alors,

$$C + S = \sum_{k=0}^{n} e^{a+bk} = e^{a+\frac{nb}{2}}\frac{sh\frac{b(n+1)}{2}}{sh\frac{b}{2}}$$

Et de même façon,

$$C - S = e^{-a-\frac{nb}{2}}\frac{sh\frac{b(n+1)}{2}}{sh\frac{b}{2}}$$

Alors,

$$C = ch(a + \frac{bn}{2})\frac{sh\frac{b(n+1)}{2}}{sh\frac{b}{2}} \text{ et } S = sh(a + \frac{bn}{2})\frac{sh\frac{b(n+1)}{2}}{sh\frac{b}{2}}.$$

**A10 :** La bonne réponse est c). Comme on peut écrire $(x^2-1)^n = (x-1)^n(x+1)^n$, alors d'après le formule de Leibniz :

$$P_n = \frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{d^k(x-1)^n}{dx^k}\frac{d^{n-k}(x+1)^n}{dx^{n-k}}$$

Or :

$$\forall k < n, \frac{d^k(x-1)^n}{dx^k}(1) = 0$$

donc :

$$P_n(1) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x-1)^n}{dx^n}(1)(1+1)^n = 1.$$

En utilisant la parité de $P_n$ : $P_n(-1) = (-1)^n$.