QCM 4

Sujet proposé par **Se Dara**

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in 2\pi\mathbb{Z}$, Calculer $C = \sum_{k=0}^{n} \cos(a + kb)$.
   a. $(n+1)\cos(a)$
   b. $(n+1)\sin(a)$
   c. $\dfrac{\cos\left(a+\frac{nb}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)b}{2}\right)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)}$
   d. $\dfrac{\sin\left(a+\frac{nb}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)b}{2}\right)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^* - \{0,1\}$, $z \in \mathbb{C}$. On note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n}(z + \omega^k)^n$. Calculer S_n.
   a. n
   b. $n(z^n + 1)$
   c. nz^n
   d. a, b et c ne sont pas la bonne réponse.

3. Soit $f: [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues telle que: $\forall(x, y) \in [0; 1]^2, xf(y) + yf(x) \leq 1$. On note $I = \int_0^1 f(x)dx$
   a. $I = 1$
   b. $I \leq \pi/4$
   c. $I = \pi/2$
   d. a, b et c ne sont pas la bonne réponse.

4. Soit $y: [0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1, telle que $y' = e^{-y} - e^{-3y} + e^{-5y}$. Déterminer les limites de y et y' en $+\infty$.
   a. $y \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $y' \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   b. $y \underset{+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ et $y' \underset{+\infty}{\longrightarrow} +\infty$
   c. $y \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $y' \underset{+\infty}{\longrightarrow} 1$
   d. a, b et c sont faux.

5. Soient A, B et C trois points du plan affine euclidien, d'affixes respectives a, b et c. On a $a + jb + j^2c = 0$ si et seulement si
   a. Le triangle ABC est équilatéral
   b. Le triangle ABC est rectangle.
   c. Le triangle ABC est demi carré.
   d. Les réponses a, b et c sont faux

6. Soit f une fonction réelle positive de classe $C^{n+1}(\mathbb{R})$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $a < b$, telle que :

$$\ln\left(\frac{f(b) + f'(b) + f''(b) + \cdots + f^{(n)}(b)}{f(a) + f'(a) + f''(a) + \cdots + f^{(n)}(a)}\right) = b - a$$

   a. Il existe une nombre réel $c \in]a;b[$ tel que $f^{(n+1)}(c) = f(c)$.
   b. La fonction f est une fonction constante.
   c. a et b sont faux.

7. Soit une suite réel $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que

$$a_n = E\left(\frac{n^2 + 3n + 9}{n+5}\right)$$

où $E(x)$ est la partie entière de x $(i.e.\ E(x) \leq x < E(x) + 1)$. Calculer $\sum_{k=1}^{n+2} a_k$.

   a. $(n^2 - 3n + 5)/2$
   b. $(n^2 + n + 3)/2$
   c. $(n^2 - n + 6)/2$
   d. a, b et c sont faux.

8. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les nombres α et $a > 0$, et $b > 0$ pour la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$u_n = \frac{1}{b} + \frac{1}{a+b} + \frac{1}{2a+b} + \cdots + \frac{1}{na+b} - \alpha \ln(n)$$

soit convergent .

   a. $\alpha < \frac{1}{a}$
   b. $\alpha = \frac{1}{a}$
   c. $\alpha < \frac{1}{b}$
   d. $\alpha = \frac{1}{b}$

9. Soit M une matrice inversible de taille $2n\times 2n$ telle que

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^{-1} = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$$

où A, B, C, D, E, F, G et H sont les matrice carrées de taille $n\times n$. Calculer $\det M . \det H$.

   a. $\det A . \det G$
   b. $\det E . \det D$
   c. $\det A$
   d. $\det D$

10. Soient E un $\mathbb{C} - ev$ de dimension finie, $e = Id_E$, $(f,g) \in \left(\mathcal{L}(E)\right)^2$ tel que :

$$f^2 - fog + 2f - e = 0$$

   a. $gof = e$
   b. $gof = fog$
   c. $gof = f$
   d. a, b et c sont faux