Proposition des QCM de Maths pour la préparation de concours des Grandes Ecoles

par : ***Angkeara SVAY***

Q1. Soit $n \in N^*$ et $x, y \in R$. Calculer les sommes suivantes :
$A = \sum\limits_{k=0}^{n} C_k^n \cdot cos(x + ky)$
$B = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{cos(kx)}{(cosx)^k}$ et $C = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{sin(kx)}{(cosx)^k}$ avec $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$

Réponse :

(a) $A = 2^n \cdot cos(x + ny/2)cos^n(y/2), \quad B = \dfrac{sin((n+1)x)}{cos^n(x)sin(x)}, \quad C = \dfrac{cos^{n+1}(x) - cos((n+1)x)}{cos^n x \cdot sinx}$

(b) $A = 2^n \cdot cos(x + ny/2)cos^n(y/2), \quad B = \dfrac{cos((n+1)x)}{sin^n(x)cos(x)}, \quad C = \dfrac{sin^{n+1}(x) - cos((n+1)x)}{sin^n x \cdot cosx}$

(c) $A = 2^n \cdot sin(x + ny/2)sin^n(y/2), \quad B = \dfrac{cos((n+1)x)}{cos^n(x)cos(x)}, \quad C = \dfrac{sin^{n-1}(x) - cos((n-1)x)}{sin^n x \cdot cosx}$

(d) $A = 2^n \cdot sin(x + ny/2)cos^n(y/2), \quad B = \dfrac{cos((n-1)x)}{cos^n(x)sin(x)}, \quad C = \dfrac{cos^{n-1}(x) - sin((n-1)x)}{sin^n x \cdot sinx}$

Q2. Soient $a_1, ..., a_n$ des nombres complexes, et $\omega = e^{2\pi i/n}$, et A et M les matrices ayant pour formes suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & ... & a_n \\ a_2 & a_3 & ... & a_1 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_n & a_1 & ... & a_{n-1} \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & ... & \omega^{n-1} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & ... & \omega^{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix}$$

En calculant $det(AM)$, déterminer $det(A)$.

Réponse :

(a) $det(A) = n$

(b) $det(A) = P(n)P(\omega^n)$

(c) $det(A) = P(1)P(\omega)...P(\omega^{n-1})$

(d) $det(A) = P(n)P(\omega^2)...P(\omega^{2(n-1)})$

avec : $P(x) = a_1 + a_2 x + ... + a_n x^{n-1}$

Q3. Soit $A \in M_n(R)$. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_n$ ses valeurs propres dans C. En notant B la comatrice de A, le polynome caractéristique de B est :

Réponse :

(a) $P_B(x) = (-1)^n \prod\limits_{i=1}^{n} (x - \prod\limits_{m \neq i} \lambda_m)$

(b) $P_B(x) = \prod\limits_{i=1}^{n} (x + \prod\limits_{m \neq i} \lambda_m)$

(c) $P_B(x) = (-1)^{n-1} \sum\limits_{i=1}^{n} (x - \prod\limits_{m \neq i} \lambda_m)$

(d) $P_B(x) = \prod\limits_{i=1}^{n} (x + \sum\limits_{m \neq i} \lambda_m)$

Q4. Soit f la fonction de R^2 dans R définie par $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = (x^p y^q)/(x^2 - xy + y^2)$ si $(x,y) \neq (0,0)$, où p et q sont des entiers non nuls. Pour quelles valeurs de p et q cette fonction est elle continue ?

Réponse :

(a) $p = q = 1$ (b) $p = 2, q = 1$

(c) $p = 1, q = 2$ (d) f n'est toujours pas continue

Q5. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in L(E)$. Parmi les quatre propositions suivantes, laquelle est la plus correcte ?

(a) $dim(Ker(f^2)) = 2dim(Ker(f))$ (b) $dim(Ker(f^2)) \leqslant 2dim(Ker(f))$

(c) $dim(Ker(f^2)) \geqslant 2dim(Ker(f))$ (d) Aucune des ces trois n'est correcte

Q6. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(1+x)^2 y'' + (1+x)y' - 2 = 0 \qquad \text{sur} \quad]-1, +\infty[$$

Réponse :

(a) $y = (ln(1+x^2))^2 + \lambda ln(1+\lambda x) + \mu,$ pour $\lambda, \mu \in R$

(b) $y = (ln(1+x))^3 + \lambda ln(1+x^2) + \mu,$ pour $\lambda, \mu \in R$

(c) $y = (ln(1-x))^2 + \lambda ln(1-x) + \mu,$ pour $\lambda, \mu \in R$

(d) $y = (ln(1+x))^2 + \lambda ln(1+x) + \mu,$ pour $\lambda, \mu \in R$

Q7. Résoudre sur R l'équation différentielle suivante :

$$(1+e^x)y'' + 2e^x y' + (2e^x + 1)y = xe^x$$

Réponse (pour $A, B \in R$) :

$$\text{(a)} \quad y(x) = (1-e^x)^{-1}(Acosx + B(sinx)^2 + \frac{x-1}{2}e^x)$$

$$\text{(b)} \quad y(x) = (1+e^x)(Acosx - Bsinx + \frac{x-1}{2}e^x)$$

$$\text{(c)} \quad y(x) = (1+e^x)^{-1}(Acosx + Bsinx + \frac{x-1}{2}e^x)$$

$$\text{(d)} \quad y(x) = (1+e^2x)(Acosx + Bsinx + \frac{x+1}{2}e^x)$$

Q8. Soit $n, m \in N^*$. Déterminer le PGCD de $X^n - 1$ et $X^m - 1$.

Réponse :

(a) $PGCD(X^n - 1, X^m - 1) = PGCD(X^{n-m} - 1, X - 1)$ pour $n \geqslant m$.

(b) $PGCD(X^n - 1, X^m - 1) = X^{PGCD(n,m)} - 1$

(c) $PGCD(X^n - 1, X^m - 1) = X^{PGCD(n-1,m-1)}$

(d) $PGCD(X^n - 1, X^m - 1) = X^{PGCD(n-1,m-1)} - 1$

Q9. Soit m un nombre réel et f l'endomorphisme de R^3 dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}$$

La seule valeur de m pour laquelle l'endomorphisme n'est pas diagonalisable est :

(a) $m = 2$, (b) $m = 1$, (c) $m = -1$, (d) $m = -2$

Q10. Soit $f \in L(E)$ et soient α, β deux réels distincts. On suppose que $(f - \alpha Id_E) \circ (f - \beta Id_E) = 0$. Calculer f^{-1}.

Réponse :

(a) $f^{-1} = \frac{1}{\alpha\beta}(f + (\alpha - \beta)Id_E)$ (b) $f^{-1} = \frac{1}{-\alpha\beta}(f - (\alpha + \beta)Id_E)$

(c) $f^{-1} = \frac{-2}{\alpha\beta}(f + (\alpha - \beta)Id_E)$ (d) $f^{-1} = \frac{5\beta}{-\alpha}(f - (\alpha + \beta)Id_E)$