Exercice oral

Sujet proposé par IM Seiha

Exo 1 : Analogie gravitationnelle : champ de pesanteur dans une cavité sphérique

1. On considère une sphère chargée de rayon R, de densité volumique de charge uniforme ρ. Rappeler l'expression du champ électrique en tout point M situé à l'intérieur de la sphère à une distance r ($r < R$) du centre.

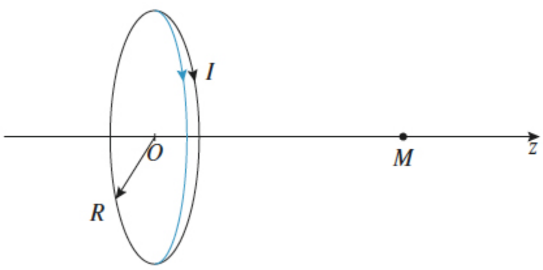
2. Déterminer le champ de gravitation à l'intérieur de la Terre, assimilée à une sphère de masse volumique ρ uniforme de centre O.

3. On imagine une cavité sphérique de rayon R', et de centre C situé à une distance h du centre de la Terre.
Déterminer le champ de gravitation en un point M de la cavité.

§Conseil :
Le champ étant à symétrie sphérique, il se calcule simplement en appliquant le théorème de Gauss.
Quelle est la charge Q(r) contenue à l'intérieur d'une sphère de rayon r ?
Pour trouver les grandeurs analogues entre les champs de gravitation et électrostatiques, écrire côte à côte les lois de Newton et de Coulomb.
La solution simple repose sur le principe de superposition. Il faut trouver deux distributions sphériques dont la combinaison est identique au système étudié.
À noter** : **Garder l'expression intrinsèque des champs au moyen des vecteurs-positions.
§

Exo 2 : Circulation du champ magnétique créé par une spire sur son axe

Soit une spire d'axe Oz, de centre O, de rayon R parcourue par un courant d'intensité I.



1. Calculer $\vec{B}(M)$ en un point M de l'axe Oz.

2.**a**) Calculer la circulation du champ magnétique le long de l'axe (Oz) (de $-\infty$ à $+\infty$).

b) Interpréter le résultat obtenu.

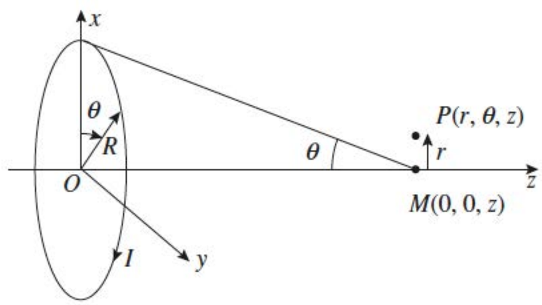
3. Calculer de même la circulation du champ magnétique le long de l'axe (Ox) (de $-\infty$ à $+\infty$) d'un solénoïde circulaire de rayon R, de longueur l et comportant N spires jointives parcourues chacune par un courant d'intensité I.

§Conseil :
1) Ce calcul doit être connu : il fait partie des INCONTOURNABLES.
2) permet de « retrouver » le théorème d'Ampère.
La question 3) en présente une application.
§

Exo 3 : Champ au voisinage de l'axe d'une spire (INCONTOURNABLE)

Soit une spire de rayon R, d'axe Oz parcourue par un courant d'intensité I. On connaît le champ créé par cette spire en tout point de son axe Oz :

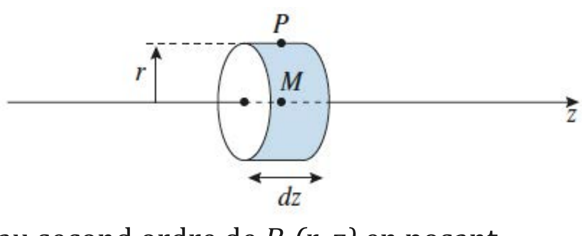
$B(M) = f(z).I$ avec $f(z) = \frac{\mu_0}{2R} sin^3\theta$ (voir exercice précédent)



Dans cet exercice, on cherche à connaître le champ en un point voisin de l'axe Oz.

1. Justifier que l'on cherche un champ de la forme $B_r(r,z)\boldsymbol{e_r} + B_z(r,z)\boldsymbol{e_z}$.

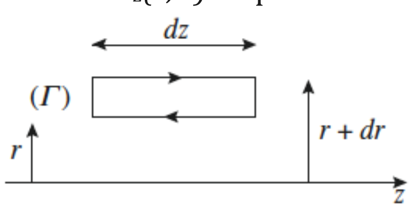
2. Exprimer le flux de B à travers une surface cylindrique élémentaire fermée de rayon r, hauteur dz (r et dz étant du même ordre de grandeur). En déduire le développement limité au 1er ordre de $B_r(r, z)$ en considérant que $B_z(r, z) \approx B(M)$, M étant sur l'axe.
On précisera pourquoi r et la hauteur du cylindre doivent être petits (ce calcul n'est valable qu'au voisinage de l'axe !).



3. Trouver alors le développement limité au second ordre de $B_z(r, z)$ en posant

$B_z(r, z) = B_z(0, z) + \beta(z)r^2I$.

Expliciter $\beta(z)$ en prenant le contour suivant :



4. En déduire le champ $\vec{B}$ en un point P de coordonnées (r, θ, z) avec $r << R$, connaissant $\vec{B}$ en M de coordonnées $(0, 0, z)$.

§Conseil :

1) L'étude habituelle des symétries et des invariances permet de répondre à la première question.

2) r étant petit, comme la hauteur du cylindre, il n'est pas besoin d'intégrer sur les différentes surfaces pour exprimer le flux. Se souvenir que le flux de B à travers n'importe quelle surface fermée est nul.

3) En appliquant le théorème d'Ampère sur un contour élémentaire ad hoc, le calcul de la circulation de B, développé au second ordre en r, permet d'expliciter $\beta(z)$.

4) On remarquera que B(P) s'exprime uniquement en fonction de B sur l'axe.

Corrigés

Exo 1 : Analogie gravitationnelle : champ de pesanteur dans une cavité sphérique

1 • Le principe de la solution est le suivant : par analyse des symétries $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$. Soit Σ la sphère de rayon r, avec $r < R$.

Σ contient la charge $Q(r) = \rho \times volume = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$

On applique le théorème de Gauss à Σ : $4\pi r^2 E(r) = \frac{Q(r)}{\epsilon_0}$.

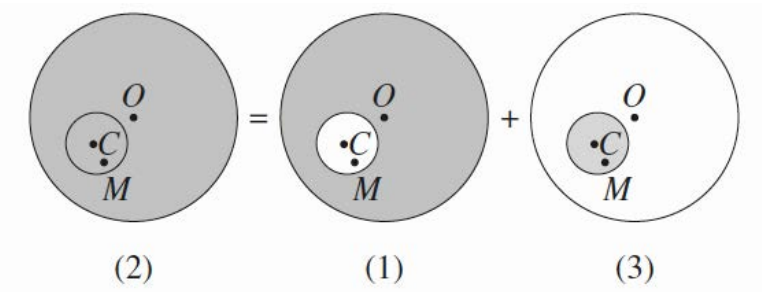
D'où le résultat: $\vec{E} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}\vec{e}_r$ pour r < R.

2. Le champ électrostatique et le champ gravitationnel sont formellement analogues. Le champ de gravitation en un point intérieur est $\vec{\mathcal{G}} = \mathcal{G}(r)\vec{e}_r$, avec :

$\mathcal{G}(r) = -4\pi G\frac{\rho}{3}r\vec{e}_r$ ou $\vec{\mathcal{G}}(M) = -4\pi G\frac{\rho}{3}\overrightarrow{OM}$

G est la constante de gravitation universelle qui correspond à $-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ dans l'analogie.

3. On affecte l'indice 1 au système étudié, l'indice 2 à la Terre sans cavité et l'indice 3 à une sphère pleine de masse volumique ρ occupant l'espace de la cavité. On peut considérer que (2) est la superposition de (1) et (3) :



La superposition des distributions implique l'addition des champs :

$$\vec{\mathcal{G}}_2(M) = \vec{\mathcal{G}}_1(M) + \vec{\mathcal{G}}_3(M)$$

D'après la question 2) :

$$\vec{\mathcal{G}}_2(M) = -4\pi G\frac{\rho}{3}\overrightarrow{OM} \quad et \quad \vec{\mathcal{G}}_3(M) = -4\pi G\frac{\rho}{3}\overrightarrow{CM}$$

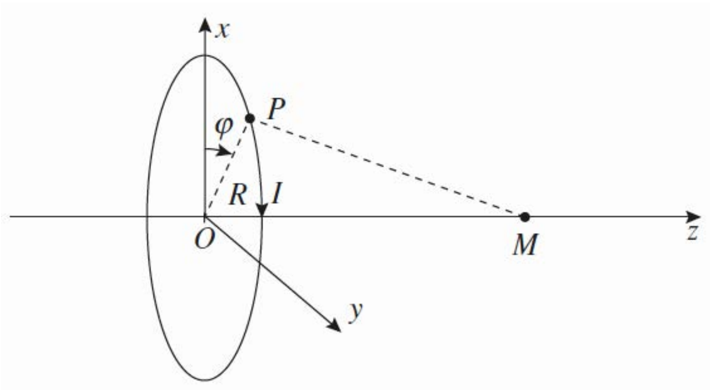
On obtient donc, en remarquant que $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{OC}$:

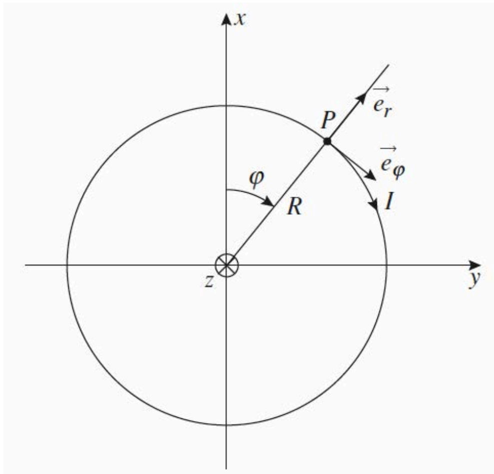
$$\vec{\mathcal{G}}_1(M) = -4\pi G \frac{\rho}{3}\overrightarrow{OC}$$

Le champ de gravitation est donc uniforme dans une cavité sphérique, quel que soit son rayon.

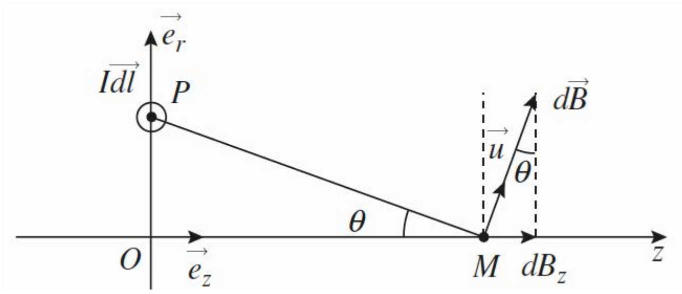
Exo 2 : Circulation du champ magnétique créé par une spire sur son axe

1. Soit une spire de rayon R , d'axe Oz , de centre O parcourue par un courant d'intensité I .





Tout plan contenant l'axe Oz est un plan d'antisymétrie des courants donc



$\vec{B}$ appartient à ces plans, donc à leur intersection,
soit : $\vec{B}(M) = B(z).\vec{e_z}$.

Calculons $\vec{B}(M)$ en utilisant la loi de Biot et Savart :
Soit un élément de courant $I.\vec{dl}$ en P (avec $.\vec{dl} = Rd\varphi.\vec{e_\varphi}$) :

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}.\frac{I.\vec{dl} \ \wedge \ \overrightarrow{PM}}{PM^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}.\frac{I.Rd\varphi\vec{e_\varphi} \ \wedge \ \overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} . \frac{I.Rd\varphi}{PM^2} \ \vec{u}$$

dont la composante sur z est :

$$dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} . \frac{I.Rd\varphi}{PM^2} \ sin\theta$$

Sachant que $\frac{R}{IM} = sin\theta$, on a $dB_z = \frac{\mu_0 .I}{4MR} \ sin^3\theta d\varphi$.

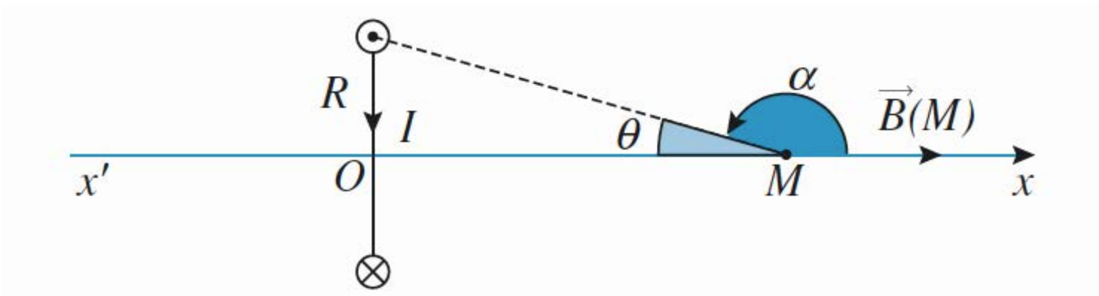
La contribution de tous les éléments de courant de la spire donne φ variant de 0 à 2M :

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4MR} \ sin^3\theta \ 2M = \frac{\mu_0 I}{2R} \ sin^3\theta = B(0) \ sin^3\theta$$

avec $B(0)= \frac{\mu_0 I}{2R}$ et $\vec{B}(M) = B_z \, \vec{u}_z$

2. a) Le vecteur champ magnétique créé par une spire (de rayon R , parcourue par un courant d'intensité I) en un point de son axe est donné par :

$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \ sin^3\theta \ \vec{u}_x$

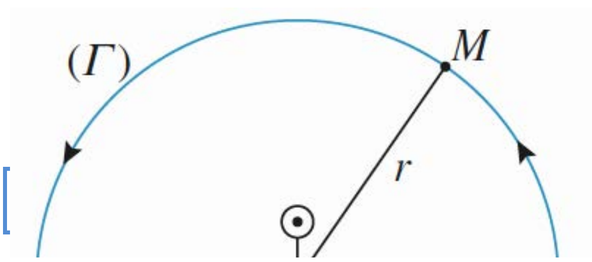


La circulation de $\vec{B}$ sur (x'Ox) est égale à $C = \int_{-\infty}^{+\infty} B(x) \, dx,$

Avec : $x = -\frac{R}{tan\alpha}$; $dx = \frac{R}{sin^2\alpha} d\alpha$ et $sin\theta = sin\alpha.$

Soit : $C = \int_0^{\pi} \frac{\mu_0 I}{2R} \frac{sin^3\theta}{sin^2\alpha} \ Rd\alpha = \mu_0 I$

b) Soit le contour fermé constitué de la droite (D) et du demi-cercle (Γ) de rayon r infini.



$$\int_{(\Gamma)} \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0 I \ ; \ \int_{(D)\cup(\Gamma)} \vec{B}.\vec{dl} = \mu_0 I$$

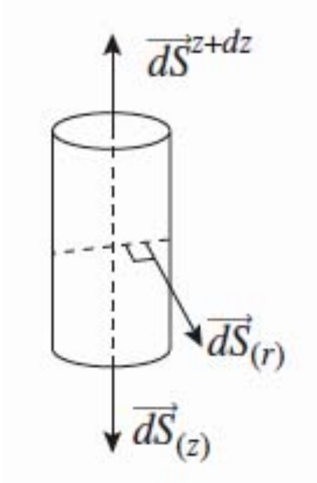
D'où $\int_{(\Gamma)} \vec{B}.\overrightarrow{dl} = 0$, ce qui est normal, car pour r grand, B varie en $1/r^3$ donc l'intégrale tend bien vers 0.

3. Le solénoïde étant constitué de N spires, en utilisant le résultat précédent, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \vec{B}(x).\overrightarrow{dx} = \mu_0 NI$$

Exo 3 : Champ au voisinage de l'axe d'une spire (INCONTOURNABLE)

1. Il y a invariance de la distribution par rotation autour de Oz donc B ne dépend pas de θ : $\vec{B}(P) = \vec{B}(r,z)$. Tout plan passant par Oz (plan $O, \vec{e}_z, \vec{e}_r$) est plan d'antisymétrie de la distribution ; le champ $\vec{B}$ appartenant à ce plan, n'a donc pas de composantes selon $\vec{e}_\theta = \vec{B}(P) = B_r(r,z)\vec{e}_r + B_r(r,z)\vec{e}_z$.



2.

$$\oiint \vec{B}.\overrightarrow{dS} = \oiint \vec{B}.\overrightarrow{dS}\,(z+dz) + \oiint \vec{B}.\overrightarrow{dS}\,(x) + \oiint \vec{B}.\overrightarrow{dS}\,(r) = 0$$
$$\approx B_z(0,z+dz)\pi r^2 - B_z(0,z)\pi r^2 + B_r(r,z)\pi r \times dz$$

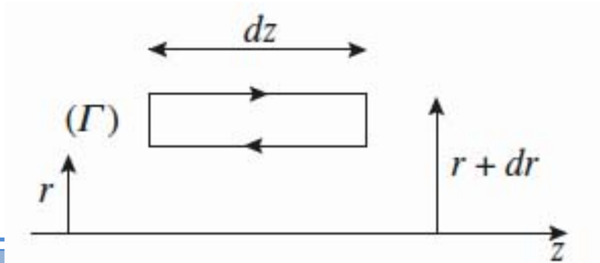
En effet comme r et dz sont petits et de même ordre de grandeur on peut considérer que B_z varie peu avec r sur $dS(z+dz)$ ou $dS(z)$ et approximer la valeur du champ sur ces deux surfaces à la valeur du champ sur l'axe, et que B_r varie peu avec z sur $dS(r)$.

Donc $$0 = \pi r^2 \frac{B_z}{z} dz + B_r(r,z) 2\pi r dz$$

D'où $B_r(r,z) = -\frac{r}{2}\frac{dB_z}{dz}(0,z) = -\frac{r}{2}\frac{df(z)}{dz}\, I.$

3. Au 2e ordre en r : $B_z(r,z) = B_z(O,z) + \beta(z) r^2 I$. Pour faire intervenir la composante axiale $B_z(r,z)$ à la distance r de l'axe, appliquons le théorème d'Ampère au contour (Γ) suivant :

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{B}.\overrightarrow{dl} = B_z(r+dr,z)dz - B_r(r,z+dz)dr - B_z(r,z)dz + B_r(r,z)dr = 0$$



car il n'y a aucun courant enlacé. Ce qui donne :

$$\frac{\partial B_z}{\partial r}(r,z)drdz - \frac{\partial B_r}{\partial z}drdz = 0$$

Soit $\frac{\partial B_z}{\partial r} = \frac{\partial B_r}{\partial z}$ et ainsi :

$$2\beta(z)rI = -\frac{r}{2}\frac{d^2 B_z(0,z)}{dz} = -\frac{r}{2}\frac{d^2 f(z)}{dz^2}I$$

soit : $\beta(z) = -0.25\,\frac{d^2 f}{dz^2}$ ou $B_z(r,z) = B_z(0,z) - 0.25\,\frac{d^2}{dz^2}B_z(0,z)$.

4. Ainsi avec *M (0, 0, z)* et *P(r, θ, z)* : avec $\vec{B}(M) = B(M)\,\vec{e}_z = B(z)\,\vec{e}_z$

$$\vec{B}(P) = \vec{B}(M) - 0.5r\,\frac{d}{dz}B(z)\,\vec{e}_r - 0.25r^2\frac{d^2}{dz^2}B(z)\,\vec{e}_z$$