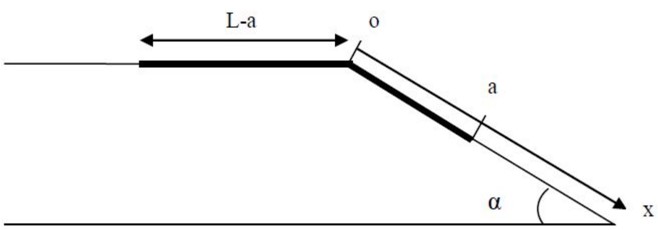
Exercices oraux

1.



Un plan incliné fait suite à un plan horizontal comme l'indique la figure ci-dessus. L'origine O de l'axe coincide avec le sommet du plan incliné. L'objet considéré est une chaîne pouvant glisser sans frottement sur le plan horizontal et sur le plan incliné. On désigne par x l'abscisse de A, extrémité de la chaine sur le plan incliné. Celle-ci est lachée du repos à $t = 0$ quand son extrémité A possède sur le plan incliné une abscisse x_0 égale à a. La longueur totale de la chaîne est L et sa masse m est répartie uniformément sur toute sa longueur. La figure correspond à l'instant initial. Calculer la vitesse de la chaine quand $x = L$, c'est-à-dire lorsque le dernier maillon quitte le plan horizontal.

2.

On considère un atome d'hydrogène dont la distribution à symétrie sphérique créant le potentiel électrostatique est le suivant :

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\exp(-\frac{r}{a})}{r}$$

1. Déterminer le champ électrostatique créé par cette distribution et étudier les cas limites $r \ll a$ et $r \gg a$.
2. Calculer le flux du champ électrostatique à travers une sphère de centre O et de rayon r. En déduire la charge $q(r)$ qui se trouve à l'intérieur d'une sphère de rayon r centrée en O.
3. Établir l'expression de la densité volumique de charge $\rho(r)$ à la distance r du point O.
5. On définit la densité de probabilité de présent $P(r)$ de l'électron dans le volume élémentaire $d\tau$ par $dq(r) = -eP(r)d\tau$ où $dq(r)$ est la charge contenue dans le volume $d\tau$. Exprimer $P(r)$ puis la probabilité $p(r)$ de trouver l'électron à une distance comprise entre r et $r + dr$ du noyau.

Solution

1.

On va résoudre cet exercice en utilisant la loi de conservation de l'energie mécanique totale du système. Le système est la chaîne de masse m et de longueur L.

Comme tous les maillons de la chaîne ont la même vitesse, on a son énergie cinétique est donnée par : $E_c = \frac{1}{2}mV^2$ où V est la vitesse de la chaîne.

Pourtant, pour l'énergie potentielle, il faut faire attention pour le calcul car tous les maillons ne sont pas à la même altitude sur le plan incliné. Prenons le plan horizontal comme l'origine des potentiels, c'est-à-dire, tous les maillons situés sur ce plan ont une énergie potentielle nulle. Sur le plan incliné, la masse de la chaine dépend de son abscisse x et sa longueur totale L, c'est-à-dire la masse de la chaîne sur ce plan est donnée par $\frac{x}{L}m$ où x est l'abscisse de A. Ils ont la même énergie potentielle qu'un point de masse identique $\frac{x}{L}m$ situé à l'abscisse $\frac{1}{2}x$ (position du centre d'inertie de la partie de la chaine sur le plan incliné).

Ainsi, l'énergie potentielle est exprimée par : $-\frac{x}{L}mg\frac{1}{2}x\sin\alpha$ et l'énergie mécanique du système est donnée par

$$E = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{x}{L}mg\frac{1}{2}x\sin\alpha = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{x^2}{2L}mg\sin\alpha$$

Comme cette énergie est constante dans le temps, sa dérivée par rapport au temps doit être nulle. On a :

$$\frac{dE}{dt} = mv\frac{dV}{dt} - \frac{mg\sin\alpha}{L}x\frac{dx}{dt} = 0$$

Or, comme $V = \dfrac{dx}{dt}$, on obtient :

$$mV(\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{g\sin\alpha}{L}x) = 0$$

On a l'équation différentielle :

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{g\sin\alpha}{L}x = 0$$

En posant $k^2 = \dfrac{g\sin\alpha}{L}$, l'équation se ramène à :

$$\frac{d^2x}{dt^2} - k^2x = 0$$

La résolution de cette équation différentielle est classique. La solution est

$$x(t) = Ae^{-kt} + Be^{kt}$$

où A et B sont des constantes à déterminer par les conditions initiales.
On sait qu'à $t = 0$, $x(0) = a$ et $V(0) = 0$. D'où, $A = B = \frac{a}{2}$.
Ainsi, on a l'expression de x est donnée par

$$x(t) = \frac{a}{2}(e^{-kt} + e^{kt}) = a\cosh kt$$

On a ensuite

$$V(t) = \frac{dx}{dt} = ak\sinh kt$$

Lorsque le dernier maillon quitte le plan horizontal, c'est-à-dire $x = L$, on a :

$$L = a\cosh kt_1 \qquad \text{d'où} \qquad t_1 = \frac{1}{k}\arg\cosh\frac{L}{a}$$

En remplaçant t_1 dans l'expression de V, on obtient sa vitesse à l'instant t_1 :

$$V(t_1) = ak\sinh(\arg\cosh\frac{L}{a}) = ak\sqrt{\cosh^2(\arg\cosh\frac{L}{a}) - 1} = ak\sqrt{\frac{L^2 - a^2}{a^2}}$$

On a donc,

$$V(t_1) = k\sqrt{L^2 - a^2}$$

2.

1. On applique la relation $\vec{E} = -gradV$. Comme V ne dépend que de r, le champ est radial. On obtient ainsi

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dr}\vec{u}_r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(1 + \frac{r}{a}\right)\frac{\exp(-\frac{r}{a})}{r^2}\vec{u}_r.$$

Par l'expression de champ électrostatique, on voit que :

- Si $r \gg a$, ce qui correspond à la limite $r \to \infty$, on a que $\vec{E}$ est négligeable.
- Si $r \ll a$, c'est-à-dire à la limite $r \to 0$, on a

$$\vec{E} \simeq \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$$

On observe que ce dernier est l'expression du champ créé par une charge ponctuelle.

2. L'expression de flux est donnée par

$$\phi = \int \vec{E}.d\vec{S} = 4\pi r^2 E(r) = \frac{q}{\varepsilon_0}\left(1 + \frac{r}{a}\right)\exp(-\frac{r}{a})$$

Ensuite, en appliquant le théorème de Gauss,

$$\phi = \int \vec{E}.d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

on en déduit la charge contenue dans la sphère de rayon r

$$Q_{int} = q\left(1 + \frac{r}{a}\right)\exp(-\frac{r}{a})$$

3. Entre deux sphères de rayon r et $r + dr$, la charge est :

$$dQ_{int} = Q_{int}(r + dr) - Q_{int}(r) = 4\pi r^2 \rho(r) dr$$

on obtient alors :

$$\rho = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{dQ_{int}}{dr} = -\frac{q}{4\pi r a^2}\exp(-\frac{r}{a})$$

4. Comme c'est un atome d'hydrogène, on a $q = e$.

D'ailleurs, on sait que

$$dq(r) = \rho(r) 4\pi r^2 dr = -eP(r)dr$$

on obtient alors

$$P(r) = \frac{r}{a^2}\exp(-\frac{r}{a})$$

La probabilité de trouver l'électron entre r et $r + dr$ est exprimée par

$$p(r) = 4\pi r^2 P(r) = \frac{4\pi r^3}{a^2}\exp(-\frac{r}{a})$$