CONCOURS D'ADMISSION 2018 – FILIERE UNIVERSITAIRE INTERNATIONALE

SESSION D'AUTOMNE

PHYSIQUE

(Durée : 2 heures)

Les trois problèmes sont indépendants. Si vous êtes bloqué sur une question, nous vous recommandons d'accepter le résultat de cette question et de passer à la question suivante. Les différentes questions sont en grande partie indépendantes.

L'usage des calculatrices électroniques est interdit.

I. Propagation dans un câble coaxial

L'objectif de ce problème est d'établir des relations entre les paramètres physiques d'un câble coaxial qui optimisent la propagation des ondes de potentiel électrique.

Un câble coaxial (Figure 1) est constitué de :

(i) Un fil de cuivre (âme), de rayon a et de conductivité γ ;

(ii) Un isolant de constante diélectrique ε_r et de conductivité γ_r ;

(iii) Une tresse de fils de cuivre de même conductivité γ que le fil central, de rayon b et d'épaisseur négligeable ;

(iv) Un isolant externe.

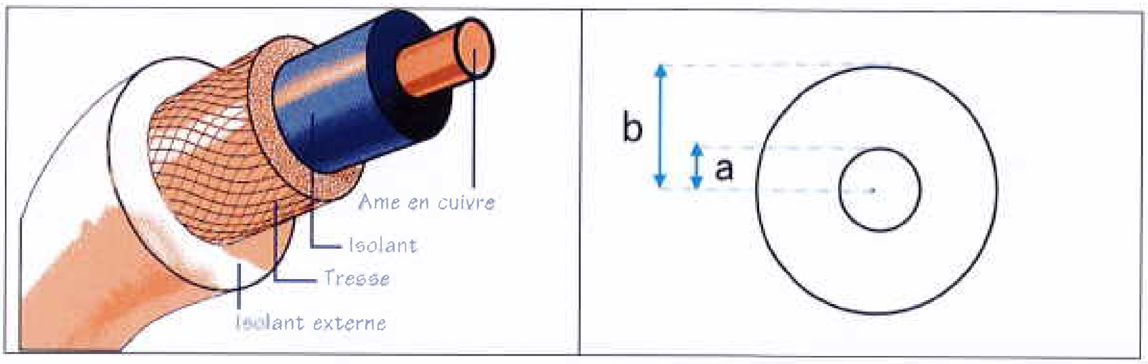

Figure 1. A gauche: composition d'un câble coaxial. A droite: coupe transverse du câble (voir détails dans le texte).

1) Modélisation d'un câble coaxial.

Calculer les caractéristiques électriques suivantes en fonction de a, b, γ , γ_r , ε_r et des constantes électriques fondamentales ε_0 et μ_0 :

a) La résistance par unité de longueur du fil de cuivre central (âme), notée R ;

b) La conductance de fuite par unité de longueur de câble, notée G ; note : pour effectuer ce calcul on pourra supposer que le fil central est au potentiel V et la tresse au potentiel nul, puis calculer le champ électrique associé entre le fil et la tresse de cuivre et en déduire l'intensité du courant électrique de fuite à travers l'isolant ;

c) La capacité par unité de longueur de câble, notée C ;

d) L'inductance propre par unité de longueur de câble, notée L ; note : pour effectuer ce calcul, on pourra utiliser le fait que la densité volumique d'énergie magnétique s'écrit : $\frac{B^2}{2\mu_0}$.

2) Equation d'onde pour le potentiel électrique (« équations des télégraphistes »).

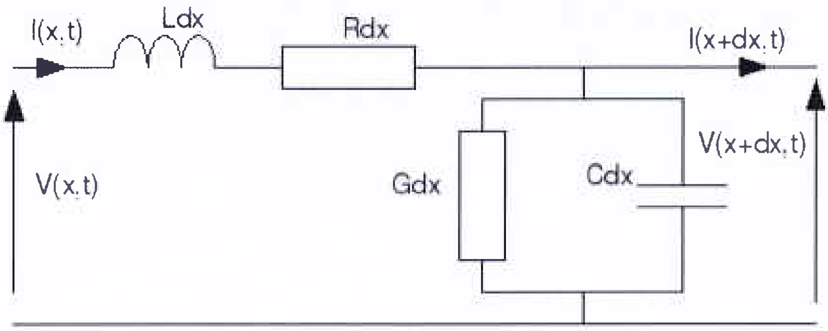

Figure 2. Schéma électrique équivalent d'un élément de câble de longueur dx. V(x,t) est la tension entre le fil central et la tresse de cuivre (reliée à la terre, donc au potentiel nul). V(x,t) est donc le potentiel électrique du fil central au point x et à l'instant t. I(x,t) est l'intensité du courant électrique qui circule dans le fil central.
Attention: Rdx est la *résistance* d'un segment élémentaire de fil de cuivre, Gdx est la *conductance* d'un segment élémentaire d'isolant.

Etablir deux équations aux dérivées partielles satisfaites par V(x,t) et I(x,t).

3) En déduire une équation pour V(x,t).

4) On cherche des solutions de la forme $V(x,t) = V_0 e^{j(\omega t - kx)}$ où j est, comme d'habitude, l'unité imaginaire (nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$). Etablir la relation suivante entre ω et k :

$$k^2 = LC\omega^2 - j(RC + GL)\omega - RG$$

5) Régime quasi-stationnaire.

On suppose que $GL \ll RC$ et $R \gg L\omega$.

a) Montrer que l'équation aux dérivées partielles pour V(x,t) s'écrit alors

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = RC\frac{\partial V}{\partial t} + RGV$$

b) Montrer que $V(x,t) = V_0 e^{j(\omega t - k'x)} e^{k''x}$ est une solution de cette équation avec k' et k'' deux constantes réelles à déterminer. En supposant que $G \gg C\omega$, donner k' en fonction de R, G, C et ω, et k'' en fonction de R et G.

c) Quelle est la vitesse de propagation (vitesse de phase) de l'onde de potentiel $V(x,t)$?

6) Régime hautes fréquences.

On suppose maintenant que $R \ll L\omega$ et $G \ll C\omega$. On note $LC = \frac{1}{c_0^2}$.

a) Calculer les parties réelle et imaginaire du vecteur d'onde k.

b) Quelle est la signification de c_0?

c) Montrer que l'amplitude de l'onde de potentiel décroît exponentiellement avec la distance x le long du câble. Exprimer la distance caractéristique d'amortissement λ en fonction de L, C, R, G.

7) Condition de Heaviside.

Montrer que le câble est un milieu non dispersif si et seulement si la condition suivante, appelée « condition de Heaviside », est satisfaite :

$$\frac{L}{C} = \frac{R}{G}$$

On rappelle qu'un milieu non dispersif est un milieu dans lequel la vitesse de phase d'une onde progressive ne dépend pas de la fréquence de cette onde. Quel est l'intérêt d'avoir un milieu non dispersif ?

II. Pose des câbles sous-marins: problèmes mécaniques

La plupart des télécommunications intercontinentales passent par des câbles sous-marins. Il existe des navires spécialisés qui déposent ces câbles au fond des mers : ces navires possèdent un treuil (grosse bobine placée à l'extrémité arrière du navire) sur lequel est enroulé le câble. Quand le navire avance, le câble se déroule. Un schéma du câble en train d'être posé est donné à la figure 3.

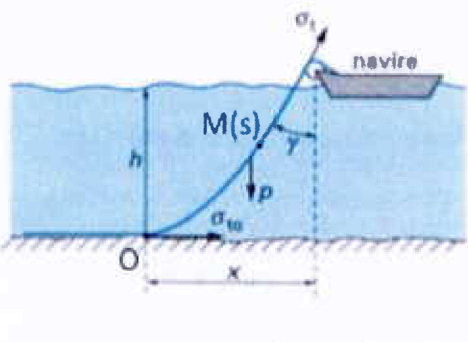

Figure 3. Schéma d'un navire en train de déposer un câble au fond de la mer. Noter le treuil à l'arrière du navire. A la sortie du treuil, la tangente au câble fait un angle γ avec la verticale. Le poids linéique *apparent* (poids de l'unité de longueur de câble moins la poussée d'Archimède) est noté p.

Soit s l'abscisse curviligne le long du câble, i.e la longueur de câble entre l'origine O et le point M(s). On note $\alpha(s)$ l'angle entre la tangente au câble au point M(s) et la verticale.

1) Soit λ la masse linéique du câble et D son diamètre. Pour les câbles usuels, on a : $\lambda = 10\ kg.m^{-1}$ et $D = 70\ mm$. Evaluer le poids linéique apparent p (voir la Figure 3 et sa légende).

2) On suppose que le navire est au repos. Ecrire l'équilibre mécanique d'un segment élémentaire de câble de longueur ds.

3) Montrer que la tension σ_t en tout point du câble vérifie les deux équations suivantes :

$$\sigma_t sin\alpha = \sigma_{t0}$$
$$\sigma_t cos\alpha = ps$$

4) En déduire la relation suivante entre x et h (voir Figure 3) :

$$h = \frac{\sigma_{t0}}{p}\left[ch\left(\frac{px}{\sigma_{t0}}\right) - 1\right]$$

5) Le navire se déplace maintenant à vitesse constante V. En supposant que la vitesse est suffisamment faible, expliquer pourquoi les équations d'équilibre établies aux questions 2 et 3 sont encore satisfaites. Quelle est la signification physique de « suffisamment faible » ?

6) A cette vitesse V, le moteur du navire exerce une force F sur le navire. Calculer l'angle γ que fait le câble à la sortie du treuil avec la verticale (voir Figure 3) en fonction de F, p et h.

III. Un verre doseur intelligent

Pour améliorer la précision des mesures en cuisine, des ingénieurs ont créé un nouveau modèle de verre doseur (voir Figure 4).

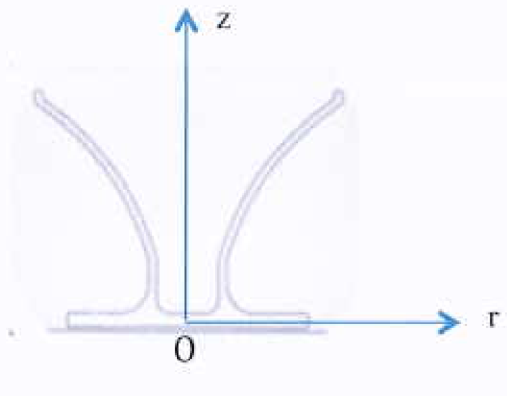

Figure 4 : coupe verticale du nouveau modèle de verre doseur. Noter que le verre doseur possède une symétrie de révolution autour de l'axe Oz.

Les ingénieurs revendiquent que la forme optimale doit satisfaire l'équation suivante :

$$\frac{S(z)}{\int_0^z S(u)du} = k \qquad \text{(III.1)}$$

où k est une constante. S(z) est la surface de la coupe horizontale du verre doseur à la cote z.

1) Que signifie physiquement cette équation ?

2) Que représente la constante k ? Estimer la valeur de k.

3) Trouver une solution de l'équation III.1 en exprimant r en fonction de z.