QCM de Maths

Par ***Angkeara SVAY***

Q1 : Pour $n \geq 2$, calculer : $\prod_{k=1}^{n-1}(1-e^{2ik\pi/n})$

a) $\frac{n\pi}{2}$ b) $2\pi n$ c) n d) $2n-1$

Q2 : Soit $a > 0$ et $D := \{(x,y) \in \Re^2;\ y \geq 0\ et\ x^2+y^2 \leq ax\}$. Calculer l'intégrale :

$$I := \iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy$$

a) $a^3\left(\frac{\pi}{6}-\frac{2}{9}\right)$ b) $a^2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{9}\right)$ c) $a^3\left(\frac{\pi}{5}-\frac{3}{7}\right)$ d) $a^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{5}\right)$

Q3 : Pour $a > 0$, la nature de la série de terme général $u_n := \cos(n^{-a})-1$ est convergente quand :

a) $a < 1$ b) $a < 0$ c) $a > \frac{1}{2}$ d) $a > \frac{1}{3}$

Q4 : Dans une base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\Re^3$, on donne un plan P ayant pour équation : $x-y-z=0$ et une droite D ayant pour équation : $x=-y=z$. Déterminer la matrice de la projection $[p]$ sur le plan P parallèlement à la droite D.

a) $[p]=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ b) $[p]=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ c) $[p]=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ d) $[p]=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Q5 : Pour une application $f \in E = C^0([0,1],\Re)$, on pose une série $g(f) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} f\left(\frac{1}{n}\right)$.

On a :

a) g est absolument convergente b) g est conditionnellement convergente
c) g est divergente c) on ne peut pas conclure sur la nature de g

Q6 : Pour une application $f \in E = C^0([0,1],\Re)$, on pose une série $g(f) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} f\left(\frac{1}{n}\right)$.

On a :

a) g est continue b) g est discontinue
c) g est conditionnellement continue c) on ne peut pas conclure sur la continuité de g

Q7 : Pour $u \in]0,1[$, écrire l'intégrale $I := \int_0^1 \frac{\ln^2 u}{1-u} du$ sous forme de somme de série :

a) $I = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ b) $I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ c) $I = (2n+1)\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ d) $I = 3\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3+n^2+1}$

Q8 : On pose $z = e^{2i\pi/7}$, $s = z + z^2 + z^4$ et $s = z^3 + z^5 + z^6$. Calculer $s+t$ et st.

a) -2 et 1 b) -3 et -2 c) 1 et -2 d) -1 et 2

Q9 : Calculer la limite : $\lim_{n\to\infty}\left(n^{-3/2} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{n+k} \right)$

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}\left(2^{2/5}+1\right)$ c) $\frac{3}{2}\left(2^{2/5}-1\right)$ d) $\frac{2}{3}\left(2^{3/2}-1\right)$

Q10 : Pour $z_1, z_2, ..., z_n$ les racines complexes simples du polynomial d'ordre n supérieur ou égale à 2 : $P_n := x^n - x + 1$, calculer le déterminant de la matrice :

$$M := \begin{pmatrix} 1+z_1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 1+z_2 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... \\ 1 & 1 & ... & 1+z_n \end{pmatrix}$$

a) -2^n b) $2(-1)^n$ c) -1 d) $(-2)^n$

Solutions des QCM

S1 : Le polynôme $x^n - 1$ admet dans C les n racines différentes $e^{2ik\pi/n}$ pour $k = 0;1;\ldots;n-1$. On peut ainsi écrire $x^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(x - e^{2ik\pi/n})$ ce qui implique :

$(x-1)(x^{n-1} + \ldots + x + 1) = (x-1)\prod_{k=1}^{n-1}(x - e^{2ik\pi/n})$. On a donc $(x^{n-1} + \ldots + x + 1) = \prod_{k=1}^{n-1}(x - e^{2ik\pi/n})$.

En remplaçant x par 1, on obtient : $\prod_{k=1}^{n-1}(1 - e^{2ik\pi/n}) = n$

La réponse correcte est donc c.

S2 : On a $x^2 + y^2 - ax = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$, ainsi le domaine d'intégration D est un demi-disque de rayon $\frac{a}{2}$ centre $\left(\frac{a}{2};0\right)$. Effectuons un changement du repère cartésien au repère polaire, on a finalement : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a.\cos\theta} \sqrt{a^2 - \rho^2}\, d\rho d\theta = a^3\left(\frac{\pi}{6} - \frac{2}{9}\right)$

La réponse correcte est donc a.

S3 : On a $\cos x - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$. Pour a>0, on peut écrire : $u_n \sim -\frac{1}{2}n^{-2a}$

Comme la suite $-n^{-2a}$ est de signe constant, les séries de terme général u_n et $-n^{-2a}$ sont de même nature. La série de terme général u_n converge alors si et seulement si

$$a > \frac{1}{2}.$$

La réponse correcte est donc c.

S4 : Une base de plan P est formée des vecteurs $a_1 = e_1 + e_2$ et $a_2 = e_1 + e_3$. En plus, la droite D est dirigée par un vecteur $a_3 = e_1 - e_2 + e_3$. On peut ainsi écrire $e_1 = a_1 - a_2 + a_3$, $e_1 = a_2 - a_3$ et $e_3 = -a_1 + 2a_2 - a_3$. Comme la matrice $[p]$ est le projecteur sur le plan P et parallèle à la droite D, on peut écrire : $p(a_1) = a_1$; $p(a_2) = a_2$ et $p(a_3) = 0$. On a alors : $p(e_1) = a_1 - a_2 = e_2 - e_3$; $p(e_2) = a_2 = e_1 + e_3$; $p(e_3) = -a_1 + 2a_2 = e_1 - e_2 + 2e_3$. La matrice est finalement écrite sous la forme : $[p] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

La réponse correcte est donc a.

S5 : Une fonction continue sur l'intervalle $[0, 1]$ est borné sur cette intervalle de sorte que $\|.\|_\infty$ est bien définie sur E. On a donc la majoration : $\left|\frac{(-1)^n}{2^n} f\left(\frac{1}{n}\right)\right| \leq 2^{-n}\|f\|_\infty$. Cette majoration nous montre que la série de terme générale $\frac{(-1)^n}{2^n} f\left(\frac{1}{n}\right)$ est absolument convergente.

La réponse correcte est donc a.

S6 : Comme g est une application linéaire sur l'espace vectoriel E, et d'après la majoration de la solution S5, on peut écrit : $|g(f)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n}\|f\|_\infty = \|f\|_\infty$. Une caractérisation de la continuité des applications linéaires nous montre que g est continue.

La réponse correcte est donc a.

S7 : L'application $f(u) = \frac{\ln^2 u}{1-u}$ est continue sur $]0; 1[$ et sur cette intervalle, on peut écrire $f(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n \ln^2 u$. Cela implique $I = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 u^n \ln^2 u \, du$. Comme $\int_0^1 u^n \ln^2 u \, du = \frac{2}{(n+1)^3}$. On a finalement $I = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$

La réponse correcte est donc a.

S8 : On a $z^7 = 1$ qui conduit à avoir $1 + z + \ldots + z^6 = 0$ pour $z \neq 1$. Nous avons donc :
$s + t = z + z^2 + \ldots + z^6 = -1$ et $st = z^4 + z^5 + z^6 + 3z^7 + z^8 + z^9 + z^{10} = 3 + z + z^2 + \ldots + z^6 = 2$

La réponse correcte est donc d.

S9 : Grâce à la somme de Riemann, nous avons $\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$ qui converge vers l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ quand $n \to \infty$.

On peut écrire : $n^{-3/2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 \sqrt{1+x}\, dx = \frac{2}{3}\left(2^{3/2} - 1\right)$

La réponse correcte est donc d.

S10 : On suppose une fonction $f(t) = \det \begin{pmatrix} t+z_1 & t & \dots & t \\ t & t+z_2 & \dots & t \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t & t & \dots & t+z_n \end{pmatrix}$

Faisons des opérations $C_i - C_n \to C_i$ on peut écrire la fonction $f(t)$ sous la forme

$$f(t) = \det \begin{pmatrix} z_1 & 0 & \dots & t \\ 0 & z_2 & \dots & t \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -z_n & -z_n & \dots & t+z_n \end{pmatrix}$$

En faisant un développement par rapport à la dernière colonne, on pourra écrire la fonction sous la forme $f(t) = a + bt$ dont a peut être obtenu en donnant $t = 0$, c'est-à-dire : $f(0) = z_1 \times z_2 \times \dots \times z_n = a$. En plus, $f'(t)$ est la somme de n déterminant qui sont obtenus à partir du déterminant initial par dérivation de la i[ème] colonne, les autres étant inchangés. Par exemple, le premier déterminant de la somme de $f'(t)$ est

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & z_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & z_n \end{pmatrix} = z_2 \times \dots \times z_n$$

On en déduit que $f'(t) = \sum_{i=1}^{n} z_1 \times \dots \times z_{i-1} \times z_{i+1} \times \dots \times z_n = b$. On a donc $f(1) = a + b$

Ainsi, $\det(M) = a + b = z_1 \times \dots \times z_n + \sum_{i=1}^{n} z_1 \times \dots \times z_{i-1} \times z_{i+1} \times \dots \times z_n$

Comme $z_1 ; \dots ; z_n$ sont des racines simples du polynomial $P_n := x^n - x + 1$, on a donc $a = (-1)^n$; $b = (-1)^n$. On a finalement : $\det(M) = 2(-1)^n$.

La réponse correcte est donc b.