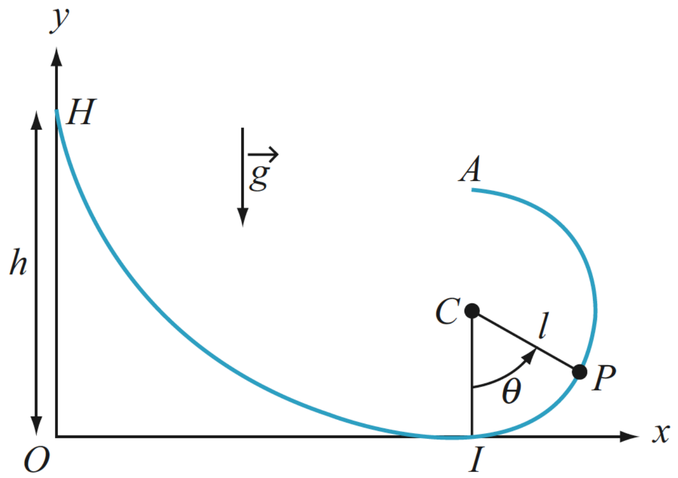
Par Seiha M

QCM de Physique

Exo 1 : “Looping”

Un mobile P assimilé à un point matériel de masse m, se déplace sur un rail situé dans un plan vertical. Le rail comporte une partie IA constituée d'un demi cercle de centre C et de diamètre $IA = 2\ell$. On néglige tout frottement et la liaison entre le mobile et le rail est unilatérale, c'est-à-dire que la réaction $\vec{R}$ exercée par le rail sur le mobile ne peut changer de sens. La position du point P lorsque sa trajectoire est à l'intérieur du demi cercle est repérée par l'angle $\theta = \left(\widehat{\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{CP}}\right)$ (cf. figure à droite). On désigne par g la norme de l'accélération de la pesanteur.



Question 1 : À l'instant $t = 0$, le mobile est libéré en H sans vitesse initiale à la hauteur h au-dessus de I, point le plus bas du demi-cercle.
Exprimer en fonction de ℓ, h, g et θ, la norme v_p de la vitesse du point P lorsqu'il est à l'intérieur du demi cercle.

A. $v_p = \sqrt{2g[h - l(1 - cos\theta)]}$

B. $v_p = \sqrt{2ghcos\theta}$

C. $v_p = \sqrt{2g[h + l(1 - sin\theta)]}$

D. $v_p = \sqrt{2g(h - lcos\theta)}$

Question 2 : Donner l'expression de la norme R de la réaction $\vec{R}$ exercée par le rail sur le point P.

A. $R = \frac{2mg}{l}(h - l + lcos\theta)$

B. $R = \frac{mg}{l}(h + l - lcos\theta)$

C. $R = \frac{2mg}{l}(h - l + lsin\theta)$

D. $R = \frac{mg}{l}(2h - 2l + 3lcos\theta)$

Question 3 : De quelle hauteur minimale h_m doit-on lâcher le mobile sans vitesse initiale en H pour qu'il arrive jusqu'en A, point le plus haut du demi cercle ?

A. $h_m = \frac{5}{2}l$

B. $h_m = 2l$

C. $h_m = l$

D. $h_m = \frac{3}{2}l$

Question 4 : Donner dans ces conditions ($h = h_m$) l'expression de la réaction R_I en I, point le plus bas de la trajectoire.

A. $R_I = 3mg$ B. $R_I = 2mg$

C. $R_I = 6mg$ D. $R_I = \frac{5}{2}mg$

Question 5 : Exprimer la norme v_A de la vitesse du mobile lorsqu'il arrive au point A après avoir été lâché sans vitesse initiale depuis une hauteur $h = h_m$.

A. $v_A = \sqrt{2gl}$ B. $v_A = \sqrt{gl}$

C. $v_A = \sqrt{2gh}$ D. $v_A = 0$

Question 6 : On désigne par x_C l'abscisse du centre du demi cercle. Calculer, pour $h = h_m$, l'abscisse x_0 du point P lorsque la trajectoire du mobile coupe l'axe Ox tangent au demi-cercle en I après être passée par le point A.

A. $x_0 = x_C$ B. $x_0 = -l$

C. $x_0 = x_C - 2l$ D. $x_0 = 0$

Exo 2 : "Satellite"

On désigne par $\Re_G\left(T, \overrightarrow{e_{x0}}, \overrightarrow{e_{y0}}, \overrightarrow{e_{z0}}\right)$ un référentiel dont l'origine coïncide avec le centre T de la Terre et dont les axes sont dirigés vers trois étoiles fixes de la sphère céleste. Dans ce référentiel que l'on suppose galiléen, la Terre est animée d'un mouvement de rotation uniforme de vecteur vitesse de rotation $\vec{\Omega} = \Omega\overrightarrow{e_{z0}}$. La Terre, de masse M, est supposée sphérique de rayon R et parfaitement homogène.
Un satellite de masse m, supposé ponctuel et exclusivement soumis à la force de gravitation de la Terre, est placé sur une orbite circulaire à une altitude h.

Question 1 : L'application du théorème du moment cinétique au satellite en T dans $\Re_G$ montre que sa trajectoire dans $\Re_G$:

A. est plane et contient le centre de la Terre.

B. est plane et doit nécessairement contenir l'axe des pôles.

C. est plane et parallèle au plan équatorial.

D. est plane et doit nécessairement contenir le plan équatorial.

Question 2 : Calculer la vitesse v_0 du satellite sur sa trajectoire dans $\Re_G$ en fonction de son altitude h. On désigne par G la constante de gravitation universelle.

A. $v_0 = G\sqrt{\frac{M}{R+h}}$

B. $v_0 = G\sqrt{\frac{M}{h}}$

C. $v_0 = \sqrt{\frac{MG}{R+h}}$

D. $v_0 = \sqrt{\frac{MG}{h}}$

Question 3 : Calculer la période de révolution T_0 du mouvement du satellite en fonction de son altitude h.

A. $T_0 = 2\pi\frac{MG}{\sqrt{(R+h)^3}}$

B. $T_0 = 2\pi\frac{\sqrt{(R+h)^3}}{MG}$

C. $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{MG}{R+h}}$

D. $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{(R+h)^3}{MG}}$

Question 4 : Calculer l'énergie mécanique $\mathcal{E}_{mt}$ du satellite sur sa trajectoire dans $\Re_G$.

A. $\mathcal{E}_{mt} = \frac{mMG}{R+h}$

B. $\mathcal{E}_{mt} = -\frac{mMG}{2(R+h)}$

C. $\mathcal{E}_{mt} = \frac{mMG}{2(R+h)}$

D. $\mathcal{E}_{mt} = -\frac{mMG}{R+h}$

Question 5 : Calculer l'énergie mécanique $\mathcal{E}_{ms}$ du satellite lorsqu'il est immobile au sol en un point M de la Terre situé à la latitude λ.

A. $\mathcal{E}_{ms} = -\frac{mMG}{R} + \frac{1}{2}mR^2\Omega^2 sin^2\lambda$

B. $\mathcal{E}_{ms} = \frac{mMG}{2R} + \frac{1}{2}mR^2\Omega^2 cos\lambda$

C. $\mathcal{E}_{ms} = -\frac{mMG}{R} + \frac{1}{2}mR^2\Omega^2 cos^2\lambda$

D. $\mathcal{E}_{ms} = \frac{mMG}{2R} + \frac{1}{2}mR^2\Omega^2 sin\lambda$

Question 6 : Exprimer l'énergie $\mathcal{E}_{sat}$ qu'il est nécessaire de fournir au satellite pour le placer sur son orbite.

A. $\mathcal{E}_{sat} = m\left[\frac{MG}{2R}(1 - \frac{h}{R+h}) + \frac{1}{2}R^2\Omega^2 sin^2\lambda\right]$

B. $\mathcal{E}_{sat} = m\left[\frac{MG}{2R}(1 + \frac{R}{h}) + \frac{1}{4}R^2\Omega^2 sin^2\lambda\right]$

C. $\mathcal{E}_{sat} = m\left[\frac{MG}{R}\left(1 - \frac{R+h}{R}\right) - \frac{1}{2}R^2\Omega^2 cos\lambda\right]$

D. $\mathcal{E}_{sat} = m\left[\frac{MG}{2R}\left(1 + \frac{h}{R+h}\right) - \frac{1}{2}R^2\Omega^2 cos^2\lambda\right]$

Réponse

Exo 1 : “Looping”

Question 1 : Réponse A

Dans le référentiel du sol, supposé galiléen, le mobile est soumis à deux forces :

- son poids $\vec{P}$ force conservative et constante ;
- la réaction du rail $\vec{R}$ normale au déplacement, donc ne travaillant pas.

⌘ Remarque
Tout exercice de dynamique du point nécessite d’aller puiser dans le vivier de ressources suivant :
1. PFD
2. théorème du moment cinétique
3. théorème de l’énergie cinétique
4. théorème de l’énergie mécanique
Les expressions 1 et 2 sont vectorielles. Les expressions 3 et 4 sont scalaires et se déclinent sous deux formulations : l’une différentielle, l’autre intégrée.
Le choix de la méthode est conditionné par l’énoncé, ainsi que par la question posée. Dans le cas présent, on cherche à déterminer la norme de la vitesse au point P, ce qui suggère l’emploi d’une expression scalaire faisant intervenir l’énergie cinétique : théorème de l’énergie cinétique ou théorème de l’énergie mécanique. Par ailleurs, la vitesse au point H est connue, ce qui oriente vers une formulation intégrée de ces théorèmes. Enfin, le fait qu’une des deux forces ne travaille pas, le fait que $\vec{P}$ soit conservative, et le fait que $\vec{P}$ soit constante, sont autant d’indices qui viennent confirmer l’intérêt d’un tel choix dans un souci de simplification des calculs.
⌘

Nous opterons pour le théorème de l’énergie cinétique, appliqué au mobile entre les points H et P :

$$\frac{1}{2}mv_p^2 - \frac{1}{2}mv_H^2 = \sum W_{HP}(\vec{F}) = W_{HP}(\vec{P}) + W_{HP}(\vec{R}) = W_{HP}(\vec{P})$$

$$\frac{1}{2}mv_p^2 = \vec{P}.\overrightarrow{HP} = (-mg.\vec{e_y}).\overrightarrow{HP} = -mg(y_p - y_H)$$

$$= mg(y_H - y_P) = mg[h - l(1 - cos\theta)]$$

d’où $$v_P = \sqrt{2g[h - l(1 - cos\theta)]} \quad (1)$$ Réponse A

Comme nous l’avons signalé, l’emploi du théorème de l’énergie mécanique s’avère tout aussi efficace. La seule force qui travaille, le poids, est conservative, donc l’énergie mécanique est conservée entre H et P :

$$\mathcal{E}_m(P) = \mathcal{E}_m(H)$$

$$\mathcal{E}_c(P) + \mathcal{E}_P(P) = \mathcal{E}_c(H) + \mathcal{E}_P(H)$$

$$\frac{1}{2}mv_p^2 + mgy_P = \frac{1}{2}mv_H^2 + mgy_H$$

$$\frac{1}{2}mv_p^2 + mgl(1 - cos\theta) = mgh$$

$$v_P = \sqrt{2g[h - l(1 - cos\theta)]}$$

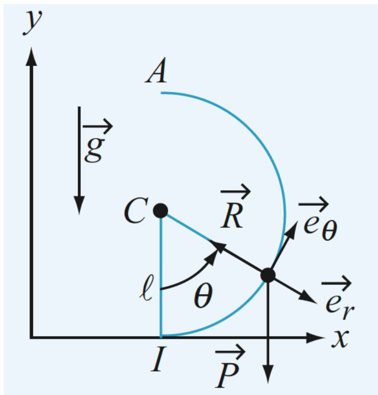
⌘NON!
L'expression de v_P proposée à la réponse D est une fonction croissante de θ, ce qui signifie que le mobile accélérerait dans sa phase ascendante. Ce résultat est bien évidemment absurde, et cette réponse devait être éliminée.
⌘

Question 2 : réponse D

⌘Rappel

- *Le théorème de l'énergie cinétique et le théorème de l'énergie mécanique font tous deux disparaître la réaction $\vec{R}$ parce qu'elle ne travaille pas.*
- *Le théorème du moment cinétique appliqué en C fait également disparaître $\vec{R}$ mais pour une autre raison : cette force est centrale.*

Cette question ne peut donc être résolue qu'à l'aide du PFD, qui restera toujours l'expression la plus porteuse d'information.
⌘



Le PFD appliqué au mobile situé au point P dans le référentiel du sol supposé galiléen s'écrit :

$$\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$$

et dans la base polaire $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ du plan xOy :

$$\begin{pmatrix} mg.cos\theta \\ -mg.sin\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -R \\ 0 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} -l\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \\ l\frac{d^2\theta}{dt^2} \end{pmatrix}$$

Ne retenons que la composante radiale de cette équation :

$$R = mg.cos\theta + ml\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \quad (2)$$

Par ailleurs, dans la même base le vecteur vitesse s'écrit : $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ l\frac{d\theta}{dt} \end{pmatrix}$

Et sa norme vaut : $v = l\frac{d\theta}{dt}$ (3)

En reportant (1) et (3) dans (2), on obtient l'expression recherchée :

$$R = mg.cos\theta + \frac{mv^2}{l} = mg.cos\theta + \frac{2mg[h - l(1 - cos\theta)]}{l}$$

$$R = \frac{mg}{l}(2h - 2l + 3l.cos\theta)$$

⌘NON!
Les fonctions $R(\theta)$ des réponses B et C sont croissantes, ce qui n'est pas conforme au résultat

attendu : ces réponses pouvaient être éliminées.
⌘
Question 3 : Réponse A

⌘NON!
Pour atteindre le point A, le mobile doit évidemment être lâché d'une altitude supérieure ou égale à celle de A, qui vaut 2l : cela invalide immédiatement les réponses C et D.
⌘

Par ailleurs, la liaison entre le mobile et le rail est unilatérale : cela signifie que le rail n'est pourvu d'aucun dispositif de type mâchoire, permettant de retenir le mobile. Le risque est donc le décrochement : le mobile ne parviendra en A que s'il n'a pas décroché avant d'y parvenir.

⌘ «Condition de non-décrochement»
La condition de non-décrochement n'est pas v ≠ 0 mais R ≠ 0 ou plus exactement ici R > 0.
⌘

R étant une fonction décroissante de θ, si R **>** *0* en A, où le risque de décrochement est maximal, on peut être assuré que le mobile n'a pas décroché auparavant.

$$R(A) = R(\pi) = \frac{mg}{l}(2h - 5l)$$

$$R(A) > 0 \qquad \text{si et seulement si} \qquad h > h_m = \frac{5l}{2}$$

Question 4 : réponse C

L'expression de la norme R de la réaction exercée par le rail sur le point P a été établie à la question (2) :

$$R = \frac{mg}{l}(2h - 2l + 3l.cos\theta)$$

Au point I, où $\theta = 0$, la réaction s'écrit : $R_I = \frac{mg}{l}(2h + l)$
Et dans les conditions de la question précédente ($h = h_m$) :

$$R_I = 6mg$$

Question 5 : réponse B

La relation établie à la question 1 donne l'expression de la norme de la vitesse du mobile au point P après avoir été lâché sans vitesse initiale depuis une hauteur h :

$$v_p = \sqrt{2g[h - l(1 - cos\theta)]}$$

Au point A, où θ = π, la norme de la vitesse s'écrit : $v_A = \sqrt{2g(h - 2l)}$

et, dans les conditions où $h = h_m = \frac{5l}{2} \quad : \quad v_A = \sqrt{gl}$

⌘ *NON !!!*
Comme il a été expliqué à la question 3, la vitesse de décrochement est strictement positive : la réponse D ne peut donc pas convenir.
La réponse C pouvait également être éliminée : elle correspond à la vitesse acquise à l'issue d'une chute libre de hauteur h. Autrement dit, c'est la vitesse au point I.
⌘

Question 6 : réponse C

À l'instant où le mobile quitte le rail au point **A**, son vecteur vitesse est horizontal et vaut, d'après la question précédente :

$$\overrightarrow{v_A} = -\sqrt{gl}.\overrightarrow{e_x}$$

Le mouvement ultérieur est celui d'une chute libre, avec vitesse initiale, depuis une hauteur $2l$.
Le PFD, appliqué lors de la chute au mobile soumis à son seul poids, s'écrit :

$$m\vec{a} = m\vec{g}$$

soit, en projection sur les deux axes Ox et Oy du plan vertical de la trajectoire :

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -g \end{cases}$$

Après deux intégrations successives par rapport à t, et en choisissant pour nouvelle origine des temps l'instant où le mobile quitte le rail au point A, on obtient :

$$\begin{cases} x(t) = -\sqrt{gl}.t + x_C \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + 2l \end{cases}$$

L'équation de la trajectoire apparaît en substituant t dans les deux équations horaires précédentes :

$$y(x) = -\frac{(x_c - x)^2}{2l} + 2l$$

La trajectoire est donc une branche de parabole convexe de sommet A. Elle coupe l'axe Ox au point d'abscisse x_0 tel que $y = 0$, d'où :

$$x_0 = x_c - 2l$$

⌘

- *Rappelons que la trajectoire d'une chute libre n'est verticale qu'en l'absence de* *composante horizontale de la vitesse initiale. Dans tous les autres cas, elle est parabolique. Ici, $\overrightarrow{v_A}.\overrightarrow{e_x} \neq 0$, donc la réponse A est impossible.*

- *Par ailleurs, l'origine du mouvement parabolique étant en A d'abscisse x_C, les expressions B et D, qui ne font pas intervenir x_C, doivent être éliminées.*

⌘

Exo 2 : “Satellite”

Question 1 : réponse A

Le satellite n'est soumis qu'à la force gravitationnelle $\overrightarrow{F_g}$ force centrale de centre T, dont le moment en T est nul.
En vertu du théorème du moment cinétique appliqué en T dans $\Re_G$ au satellite :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{L_T}}{dt}\right)_{\Re_G} = \sum \overrightarrow{\mathcal{M}_T}(\vec{F}) = \overrightarrow{\mathcal{M}_T}(\overrightarrow{F_g}) = \vec{0}$$

Donc, le moment cinétique $\overrightarrow{L_T}$ du satellite en T est conservé, ce qui signifie que la trajectoire du satellite est inscrite dans un plan contenant le centre T de la Terre, le rayon vecteur et $\overrightarrow{F_y}$

Question 2 : réponse C

L'orbite du satellite étant circulaire, la force $\overrightarrow{F_g}$ est normale au déplacement. En vertu du *PFD*, l'accélération est donc également normale, et vaut $\frac{\vec{v}_0^2}{\rho}$, où ρ désigne le rayon de courbure de la trajectoire, égal ici au rayon de l'orbite circulaire. Le PFD s'écrit donc scalairement :

$$F_g = \frac{GmM}{(R+h)^2} = m\frac{v_0^2}{(R+h)} \qquad \text{d'où} \qquad v_0 = \sqrt{\frac{MG}{R+h}}$$

Question 3 : réponse D

Sur son orbite, le satellite garde une vitesse constante, égale à : $v_0 = \sqrt{\frac{MG}{R+h}}$

Pendant une période de révolution T_0, il parcourt la distance $d = 2\pi(R + h)$,
d'où :

$$v_0 = \frac{2\pi(R+h)}{T_0} \quad , \qquad \text{soit} \qquad T_0 = \frac{2\pi(R+h)}{v_0} = 2\pi\sqrt{\frac{(R+h)^3}{MG}}$$

Question 4 : réponse B

L'énergie mécanique du satellite sur sa trajectoire vaut :

$$\mathcal{E}_{mt} = \mathcal{E}_{ct} + \mathcal{E}_{pt} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{mMG}{R+h} = \frac{mMG}{2(R+h)} - \frac{mMG}{R+h} = -\frac{mMG}{2(R+h)}$$

⌘ *NON !!!*
Le satellite est engagé dans une trajectoire fermée. Il est donc lié à la Terre, et son énergie mécanique est strictement négative : les réponses A et C sont donc impossibles.
⌘

Question 5 : réponse C

Au sol, le satellite décrit autour de l'axe des pôles un cercle de rayon $r = R.\cos\lambda$, à la vitesse angulaire Ω, et à la vitesse : $v_s = r\Omega = R\Omega.\cos\lambda$.
Son énergie mécanique vaut donc :

$$\mathcal{E}_{ms} = \mathcal{E}_{cs} + \mathcal{E}_{ps} = \frac{1}{2}mv_s^2 - \frac{mMG}{R} = -\frac{mMG}{R+h} + \frac{1}{2}mR^2\Omega^2.\cos^2\lambda$$

Question 6 : réponse D

$$\mathcal{E}_{sat} = \mathcal{E}_{mt} - \mathcal{E}_{ms} = -\frac{mMG}{2(R+h)} - \left(-\frac{mMG}{R+h} + \frac{1}{2}mR^2\Omega^2.\cos^2\lambda\right)$$

$$\mathcal{E}_{sat} = m\left[MG\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2(R+h)}\right) - \frac{1}{2}R^2\Omega^2.\cos^2\lambda\right]$$

$$\mathcal{E}_{sat} = m\left[\frac{MG}{2R}\left(\frac{(R+h)+h}{(R+h)}\right) - \frac{1}{2}R^2\Omega^2.\cos^2\lambda\right]$$

$$\mathcal{E}_{sat} = m\left[\frac{MG}{2R}\left(1 + \frac{h}{(R+h)}\right) - \frac{1}{2}R^2\Omega^2.\cos^2\lambda\right]$$